DS n°1 : nombres complexes, polynômes (1h30)

Consigne générale : Le contrôle dure 1h30 (2h pour les élèves bénéficiant d'un tiers-temps). La calculatrice et les notes de cours et de TD sont interdites. Il n'y a pas de points accordés à la propreté, mais une copie illisible ne pourra pas être correctement corrigée. **Toute trace de recherche ou de calculs sera prise en compte dans la correction, donc chaque chose que vous écrivez peut vous rapporter des points. Pas besoin d'avoir réussi l'intégralité d'un exercice pour gagner des points.** Bon courage !

Exercice 1 — Mettre les nombres complexes suivants sous forme exponentielle (aucune justification n'est demandée) :

$$z_1 = 2, \quad z_2 = -7, \quad z_3 = -i, \quad z_4 = \sqrt{3} + i.$$

Exercice 2 — Posons $a = 4\,\mathrm{e}^{i5\pi/6}$, $b = -2\sqrt{2} + i2\sqrt{2}$ et $c = \dfrac{a}{b}$.

1. Mettre a sous forme algébrique et b sous forme exponentielle.

2. Calculer c sous la forme exponentielle et algébrique.

3. En déduire la valeur de $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 3 — Résoudre l'équation du second degré suivante :

$$z^2 + (2+3i)z - (2-2i) = 0.$$

Exercice 4 — Linéariser $\sin^5(\theta)$.

Exercice 5 — Développer $\cos(4\theta)$ pour l'exprimer en fonction de puissances de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$.

Bonus : Exprimer $\cos(4\theta)$ uniquement en fonction de puissances de $\cos(\theta)$.

Exercice 6 — Soit le polynôme $P(x) = x^6 + x^5 + 3x^4 + 2x^3 + 3x^2 + x + 1$.

1. Montrer que i est une racine double de P. P étant un polynôme à coefficients réels, que peut-on dire de plus concernant ses racines ?

2. Décomposer P en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 7 — On considère le polynôme $P(x) = x^4 + 16$.

1. Le polynôme P a-t-il des racines réelles ? Justifier.

2. Factoriser P dans $\mathbb{R}[X]$ sans déterminer ses racines.

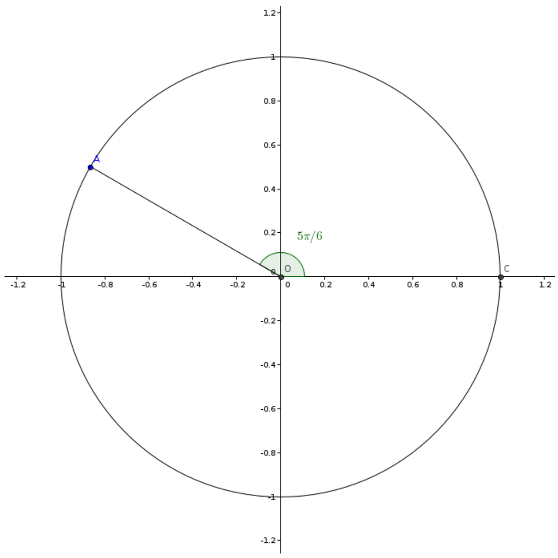
Correction

Correction de l'exercice 1 — Les formes exponentielles de ces nombres complexes sont

$$z_1 = 2, \quad z_2 = 7\,\mathrm{e}^{i\pi}, \quad z_3 = \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{2}} \quad \text{et} \quad z_4 = 2\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}}.$$

Correction de l'exercice 2 —

1. D'après la formule de Moivre, $a = 4\,\mathrm{e}^{i\frac{5\pi}{6}} = 4\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$.



Puisque $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$,

$$a = 4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{3} + 2i.$$

Passons maintenant à b. Le module de b est

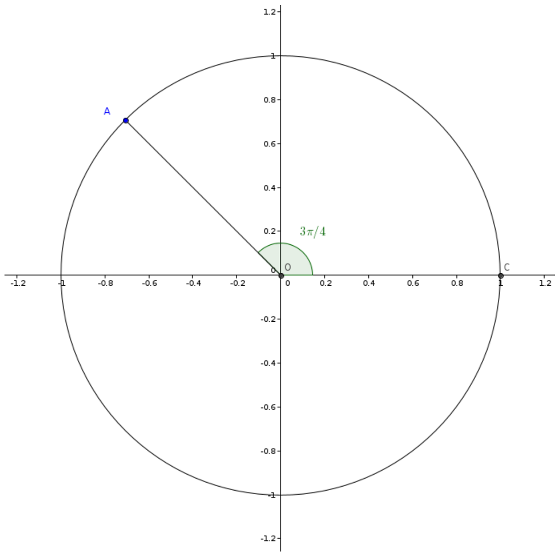
$$|b| = \sqrt{(-2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{(2)})^2} = \sqrt{8+8} = \sqrt{16} = 4.$$

Donc en mettant le module en facteur,

$$b = 4\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

On veut donc trouver un angle θ (on le prendra entre $-\pi$ et π) tel que

$$\begin{cases} \cos(\theta) & = & -\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \sin(\theta) & = & \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$$



On voit que ces valeurs (sur le dessin) correspondent à un angle $\theta = \dfrac{3\pi}{4}$. Donc,

$$b = 4\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = 4\,\mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{4}}\,.$$

2. Pour calculer c sous forme exponentielle, on calcule le rapport des formes exponentielles de a et b :

$$c = \frac{a}{b} = \frac{4\,\mathrm{e}^{i\frac{5\pi}{6}}}{4\,\mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{4}}} = \mathrm{e}^{(i\frac{5\pi}{6} - i\frac{3\pi}{4})} = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{12}}\,.$$

Pour calculer c sous forme algébrique, on calcule le rapport des formes algébriques de a et b :

$$\begin{aligned}
c &= \frac{-2\sqrt{3}+2i}{-2\sqrt{2}+i2\sqrt{2}}, \\
&= \frac{(-2\sqrt{3}+2i)(-2\sqrt{2}-i2\sqrt{2})}{(-2\sqrt{2}+i2\sqrt{2})(-2\sqrt{2}-i2\sqrt{2})}, \\
&= \frac{4\sqrt{6}+i4\sqrt{6}-i4\sqrt{2}+4\sqrt{2}}{(-2\sqrt{2})^2-(i2\sqrt{2})^2} && \text{(identité remarquable au dénominateur)}, \\
&= \frac{4((\sqrt{6}+\sqrt{2})+i(\sqrt{6}-\sqrt{2}))}{8+8}, \\
&= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.
\end{aligned}$$

3. D'après la question précédente,

$$c = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{12}} = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

En regardant la partie imaginaire de c, on a donc

$$\mathrm{Im}(c) = \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

Correction de l'exercice 3 — Résoudre l'équation revient à trouver les racines complexes du polynôme $P(z) = z^2 + (2+3i)z - (2-2i)$.

Commençons par calculer le discriminant Δ de l'équation.

$$\Delta = (2+3i)^2 - 4 \times 1 \times (-(2-2i)) = 4 + 12i - 9 + 8 - 8i = 3 + 4i.$$

On cherche ensuite les racines carrées δ_1 et δ_2 du discriminant Δ. Les solutions de l'équation seront alors données par

$$z_1 = \frac{-(2+3i)+\delta_1}{2} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-(2+3i)+\delta_2}{2}.$$

Soit $z = x + iy$ une racine carrée de Δ, c'est-à-dire que $z^2 = (x^2 - y^2) + 2ixy = \Delta = 3 + 4i$. En regardant les parties réelles et imaginaires, on sait alors que

$$\mathrm{Re}(z^2) = x^2 - y^2 = \mathrm{Re}(\Delta) = 3 \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(z^2) = 2xy = \mathrm{Im}(\Delta) = 4 \geqslant 0.$$

De plus, par le calcul des modules,

$$|z|^2 = x^2 + y^2 = |z^2| = |\Delta| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Finalement, on doit résoudre le système

$$\begin{cases} x^2 + y^2 & = & 5, \\ x^2 - y^2 & = & 3, \\ xy \geqslant 0. \end{cases}$$

En sommant les deux premières équations, on obtient que $2x^2 = 5 + 3 = 8$, donc $x^2 = 4$, soit $x = \pm 2$.

En faisant la différence des deux premières équations, on obtient que $2y^2 = 2$ soit $y^2 = 1$ et donc $y = \pm 1$.

La condition $xy \geqslant 0$ nous dit que x et y doivent être de même signe. On a donc les deux racines carrées de Δ :

$$\delta_1 = 2 + i \quad \text{et} \quad \delta_2 = -2 - i.$$

Les solutions de l'équation sont alors

$$z_1 = \frac{-(2+3i)+2+i}{2} = -i \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-(2+3i)+(-2-i)}{2} = -2-2i.$$

Correction de l'exercice 4 — D'après la formule d'Euler, $\sin^5(\theta) = \left(\frac{\mathrm{e}^{i\theta} - \mathrm{e}^{-i\theta}}{2i}\right)^5 = \frac{1}{32i}(\mathrm{e}^{i\theta} - \mathrm{e}^{-i\theta})^5.$

D'après la formule du binôme, on a

$$\begin{aligned}
\sin^5(\theta) =& \frac{1}{32i}(\mathrm{e}^{i5\theta} + 5\,\mathrm{e}^{i4\theta}(-\mathrm{e}^{-i\theta}) + 10\,\mathrm{e}^{i3\theta}(-\mathrm{e}^{-i\theta})^2 + 10\,\mathrm{e}^{i2\theta}(-\mathrm{e}^{-i\theta})^3 + 5\,\mathrm{e}^{i\theta}(-\mathrm{e}^{-i\theta})^4 + (-\mathrm{e}^{i\theta})^5),\\
=& \frac{1}{32i}(\mathrm{e}^{i5\theta} - 5\,\mathrm{e}^{3i\theta} + 10\,\mathrm{e}^{i\theta} - 10\,\mathrm{e}^{-i\theta} + 5\,\mathrm{e}^{-3i\theta} - \mathrm{e}^{-5i\theta}),\\
=& \frac{1}{32i}(\mathrm{e}^{i5\theta} - \mathrm{e}^{-5i\theta} - 5\,\mathrm{e}^{3i\theta} + 5\,\mathrm{e}^{-3i\theta} + 10\,\mathrm{e}^{i\theta} - 10\,\mathrm{e}^{-i\theta}).
\end{aligned}$$

En utilisant la formule d'Euler une deuxième fois,

$$\begin{aligned}
\sin^5(\theta) =& \frac{1}{32i}(2i\sin(5\theta) - 10i\sin(3\theta) + 20i\sin(\theta)),\\
=& \frac{1}{16}\sin(5\theta) - \frac{5}{16}\sin(3\theta) + \frac{5}{8}\sin(\theta).
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 5 — On sait que $\cos(4\theta) = \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{i4\theta}) = \mathrm{Re}((\mathrm{e}^{i\theta})^4)) = \mathrm{Re}((\cos(\theta) i\sin(\theta))^4)$. En utilisant le binôme de Newton,

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^4 = \cos^4(\theta) + 4i\cos^3(\theta)\sin(\theta) - 6\cos^2(\theta)\sin^2(\theta) - 4i\cos(\theta)\sin^3(\theta) + \sin^4(\theta).$$

En ne prenant que la partie réelle, on obtient

$$\cos(4\theta) = \cos^4(\theta) - 6\cos^2(\theta)\sin^2(\theta) + \sin^4(\theta).$$

Question bonus

Puisque $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\cos^2(\theta)\sin^2(\theta) = \cos^2(\theta)(1 - \cos^2(\theta)) = \cos^2(\theta) - \cos^4(\theta).$$

De plus,

$$\sin^4(\theta) = (1 - \cos^2(\theta))^2 = 1 - 2\cos^2(\theta) + \cos^4(\theta).$$

On en déduit que

$$\cos(4\theta) = \cos^4(\theta) - 6(\cos^2(\theta) - \cos^4(\theta)) + 1 - 2\cos^2(\theta) + \cos^4(\theta) = 8\cos^4(\theta) - 8\cos^2(\theta) + 1.$$

Correction de l'exercice 6 —

1. Tout d'abord, on évalue P en $x = i$:

$$P(i) = i^6 + i^5 + 3i^4 + 2i^3 + 3i^2 + i + 1 = -1 + i + 3 - 2i - 3 + i + 1 = 0.$$

Le nombre i est donc une racine de P. C'est une racine double de P si $P'(i) = 0$, on va donc dériver P :

$$P'(x) = 6x^5 + 5x^4 + 12x^3 + 6x^2 + 6x + 1.$$

On l'évalue en i :

$$P'(i) = 6i^5 + 5i^4 + 12i^3 + 6i^2 + 6i + 1 = 6i + 5 - 12i - 6 + 6i + 1 = 0.$$

Le nombre i est bien racine double de P.

Comme P est un polynôme à coefficients réels, le conjugué de i, $\bar{i} = -i$, est aussi racine de P avec la même multiplicité. $-i$ est donc aussi une racine double de P.

2. Puisque i et $-i$ sont racines doubles de P, il existe un polynôme Q de degré 2 tel que

$$P(x) = (x - i)^2(x + i)^2Q = (x^2 + 1)^2Q = (x^4 + 2x^2 + 1)Q.$$

On veut déterminer Q pour continuer la factorisation, on va donc faire une division euclidienne de P par $x^4 + 2x^2 + 1$.

$$\begin{array}{l|l}
x^6 + x^5 + 3x^4 + 2x^3 + 3x^2 + x + 1 & \underline{x^4 + 2x^2 + 1} \\
\underline{-(x^6 + 2x^4 + x^2)} & x^2 + x + 1 \\
x^5 + x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 1 & \\
\underline{-(x^5 + 2x^3 + x)} & \\
x^4 + 2x^2 + 1 & \\
\underline{-(x^4 + 2x^2 + 1)} & \\
0. &
\end{array}$$

On a donc $P = (x^4 + 2x + 1)(x^2 + x + 1) = (x - i)^2(x + i)^2(x^2 + x + 1)$. Il reste à trouver les racines de $Q = x^2 + x + 1$. Son discriminant vaut

$$\Delta_Q = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 = 3i^2.$$

Les racines carrées complexes du discriminant sont donc $\pm\sqrt{3}i$, et les racines de Q sont donc

$$z_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} = \overline{z_1}.$$

La factorisation de P dans $\mathbb{C}[X]$ est donc

$$P = (x - i)^2(x + i)^2(x - z_1)(x - \overline{z_1}).$$

Pour obtenir la factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$, on rassemble les racines complexes conjuguées :

$$\begin{aligned}
P(x) &= ((x - i)(x + i))^2(x - z_1)(x - \overline{z_1}), \\
&= (x^2 + (i - i)x + 1)^2(x^2 + (z_1 + \overline{z_1})x + z_1\overline{z_1}), \\
&= (x^2 + 1)^2(x^2 + 2\operatorname{Re}(z_1)x + |z_1|^2).
\end{aligned}$$

En reprenant l'expression de z_1, on a $\mathrm{Re}(z_1) = \dfrac{1}{2}$ et $|z_1|^2 = \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4} = 1$. La factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$ est donc
$$P(x) = (x^2+1)^2(x^2+x+1).$$

Correction de l'exercice 7 —

1. Pour tout réel x, $x^4 \geqslant 0$ car la puissance est paire. Donc $x^4 + 16 \geqslant 16 > 0$: le polynôme n'a pas de racines réelles.

2. On va mettre le polynôme sous forme canonique. On a

$$\begin{aligned} P(x) &= x^4 + 16, \\ &= (x^2)^2 + 4^2, \\ &= (x^2)^2 + 2 \times 4 \times x^2 + 4^2 - 8x^2, \\ &= (x^2+4)^2 - (\sqrt{8}x)^2. \end{aligned}$$

On utilise à présent l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$. Cela nous donne

$$P(x) = \underbrace{(x^2 + 4 + \sqrt{8}x)}_{A(x)}\underbrace{(x^2 + 4 - \sqrt{8}x)}_{B(x)}.$$

On vérifie que A et B sont irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$:

$$\begin{aligned} \Delta_A &= (\sqrt{8})^2 - 4 \times 1 \times 4 = 8 - 16 = -8 < 0, \\ \Delta_B &= (-\sqrt{8})^2 - 4 \times 1 \times 4 = 8 - 16 = -8 < 0. \end{aligned}$$

A et B sont irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$, on a donc factorisé P dans $\mathbb{R}[X]$:

$$P(x) = (x^2 + \sqrt{8}x + 4)(x^2 - \sqrt{8}x + 4).$$