DS n°2 : espaces vectoriels, applications linéaires et matrices, déterminants et systèmes, diagonalisation. (1h30)

Consigne générale : Le contrôle dure 1h30 (2h pour les élèves bénéficiant d'un tiers-temps). La calculatrice et les notes de cours et de TD sont interdites. Il n'y a pas de points accordés à la propreté, mais une copie illisible ne pourra pas être correctement corrigée. **Toute trace de recherche ou de calculs sera prise en compte dans la correction, donc chaque chose que vous écrivez peut vous rapporter des points. Pas besoin d'avoir réussi l'intégralité d'un exercice pour gagner des points.** Bon courage !

Exercice 1 — Les famille suivantes sont-elles libres ?

1. $S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

2. $S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

3. $S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Exercice 2 —

1. Montrer que la famille $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

2. Calculer les coordonnées de $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix}$ dans cette base.

Exercice 3 — Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3; \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ x \\ x+3y \end{pmatrix}$.

1. Montrer que f est linéaire et déterminer la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

2. Calculer $\mathrm{Ker}(f)$ (le noyau de f) et $\mathrm{Im}(f)$ (l'image de f).

3. Calculer A^2 puis A^3. Qu'est-ce que cela signifie pour l'application linéaire f ?

Exercice 4 — Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1. Calculer $\det(A)$.

2. La matrice est-elle inversible ? Si oui, calculer son inverse.

Exercice 5 — On reprend la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On note f l'application linéaire canoniquement associée à A : en notant $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, $A = \mathrm{Mat}(f, \mathcal{B})$.

1. Justifier que l'on puisse diagonaliser la matrice A.

2. Calculer le polynôme $\det(A - xI_3)$ et le factoriser.

3. Pour chaque zéro du polynôme précédent, déterminer l'espace propre associé ainsi qu'une base de celui-ci.

4. Justifier que la réunion des deux bases forme une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$.

5. Déterminer $A' = \mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}')$.

6. **[Bonus]** Donner une relation matricielle entre A et A' (on pensera aux matrices de passage).

Correction

Correction de l'exercice 1 —

1. Soient a, b des réels tels que $a\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$. Montrons que $a = b = 0$.

L'équation vectorielle ci-dessus se traduit par le système suivant :

$$\begin{cases} a-b &= 0, \\ b=0 & \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a &= 0, \\ b &= 0. \end{cases}$$

On a bien montré que $a = b = 0$, donc la famille est libre.

2. Notons $\overrightarrow{e_1} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{e_2} = \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{e_3} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$. On remarque que $\overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_1}$, donc

$$1 \cdot \overrightarrow{e_1} + 1 \cdot \overrightarrow{e_2} - 1 \cdot \overrightarrow{e_3} = 0 \text{ et } (1, 1, -1) \neq (0, 0, 0).$$

La famille n'est pas libre.

3. On a une famille de trois vecteurs dans un espace de dimension 2, elle est donc forcément liée.

Correction de l'exercice 2 —

1. On va montrer que la famille S est génératrice. Puisqu'elle a deux vecteurs et que $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$, elle sera alors nécessairement une base.

Notons $\overrightarrow{e_1} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{e_2} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$. Soit $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. On cherche a, b des réels tels que

$$a\overrightarrow{e_1} + b\overrightarrow{e_2} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}.$$

Trouver a et b revient à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} a+b &= x \quad (L_1), \\ a+2b &= y. \quad (L_2) \end{cases}$$

En faisant $(L_2) - (L_1)$, on a

$$b = y - x.$$

En remplaçant cela dans (L_1), on a

$$a + (y - x) = x \Leftrightarrow a = 2x - y.$$

Donc,

$$(2x-y)\overrightarrow{e_1}+(y-x)\overrightarrow{e_2}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}.$$

La famille est bien génératrice. C'est donc une base de $\mathbb{R}^2$.

2. Calculer les coordonnées de $\vec{v}$ dans la base revient à remplacer x par -1 et y par -4 dans la question précédente. Autrement dit,

$$\vec{v}=2\overrightarrow{e_1}-3\overrightarrow{e_2}.$$

Correction de l'exercice 3 —

1. Pour montrer que f est linéaire on vérifie que pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$, et tout $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$,

$$f\left(\lambda\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}\right)=\lambda f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}+f\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}.$$

On a

$$\begin{aligned}
f\left(\lambda\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}\right)&=f\left(\begin{pmatrix}\lambda x\\\lambda y\\\lambda z\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}\right),\\
&=f\left(\begin{pmatrix}\lambda x+x'\\\lambda y+y'\\\lambda z+z'\end{pmatrix}\right),\\
&=\begin{pmatrix}0\\\lambda x+x'\\\lambda x+x'+3(\lambda y+y')\end{pmatrix}, && \text{(expression de } f\text{)},\\
&=\begin{pmatrix}0\\\lambda x+x'\\\lambda(x+3y)+(x'+3y')\end{pmatrix},\\
&=\lambda\begin{pmatrix}0\\x\\x+3y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\x'\\x'+3y'\end{pmatrix},\\
&=\lambda f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}+f\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Pour déterminer la matrice A, on calcule les images des vecteurs de $\mathcal{B}$ par f :

- $f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$
- $f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}$
- $f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$.

On en déduit que

$$A = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\1 & 0 & 0\\1 & 3 & 0\end{pmatrix}.$$

2. Soit $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. On a $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(f)$ si et seulement si $f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, soit

$$\begin{pmatrix}0\\x\\x+3y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},$$

ce qui revient à imposer que

$$\begin{cases} x &= 0,\\ 3y &= 0.\end{cases}$$

On en déduit que

$$\mathrm{Ker}(f) = \left\{ \begin{pmatrix}0\\0\\z\end{pmatrix} \Big| z \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Passons à présent à $\mathrm{Im}(f)$. Tout d'abord, le théorème du rang nous dit que

$$\dim(\mathbb{R}^3) = 3 = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)).$$

Or, on a montré que $\mathrm{Ker}(f)$ est de dimension 1, donc $\mathrm{Im}(f)$ est de dimension 2. De plus, $\mathrm{Im}(f)$ est inclus dans l'espace vectoriel $F = \left\{ \begin{pmatrix}0\\y\\z\end{pmatrix} \Big| y, z \in \mathbb{R} \right\}$. En effet, la première coordonnée de l'image de tout vecteur par f est nulle.

On a $\mathrm{Im}(f) \subset F$ et leurs dimensions sont égales, donc $\mathrm{Im}(f) = F$.

3. Le calcul matriciel donne

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Comme A^2 est la matrice de $f \circ f$ dans $\mathcal{B}$ et A^3 est la matrice de $f \circ f \circ f$ dans la même base, on a que

$$f \circ f \circ f = 0.$$

Correction de l'exercice 4 —

1. On utilise la règle de Saarus :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 - 1 \times 1 \times 1 - 0 - 0 = -1.$$
$$\begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix}$$

2. Le déterminant de A est différent de 0, donc la matrice est bien inversible. On calcule l'inverse de A à l'aide de la comatrice. On rappelle que le cofacteur d'indice i, j de A est

$$a'_{i,j} = (-1)^{i+j} \det(A_{i,j})$$

avec $A_{i,j}$ la matrice A à laquelle on a retiré la ligne i et la colonne j. On a donc

$$\text{com}(A) = \begin{pmatrix} a'_{1,1} & a'_{1,2} & a'_{1,3} \\ a'_{2,1} & a'_{2,2} & a'_{2,3} \\ a'_{3,1} & a'_{3,2} & a'_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} {}^t\text{com}(A) = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A.$$

Correction de l'exercice 5 —

1. La matrice est symétrique à coefficients réels, elle est donc diagonalisable.

2. On note $P_A(x) = \det(A - xI_3) = \det \begin{pmatrix} -x & 0 & 1 \\ 0 & 1-x & 0 \\ 1 & 0 & -x \end{pmatrix}$. On a

$$\begin{aligned} P_A(x) &= \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1-x^2 \\ 0 & 1-x & 0 \\ 1 & 0 & -x \end{pmatrix} && (L_1 \leftarrow L_1 + xL_3), \\ &= (1-x^2)(-1)^{1+3} \det \begin{pmatrix} 0 & 1-x \\ 1 & 0 \end{pmatrix} && (\text{développement par rapport à } L_1), \\ &= (1-x^2)(x-1), \\ &= -(x-1)^2(x+1) && (1-x^2 = -(x^2-1) = -(x-1)(x+1)). \end{aligned}$$

3. Les zéros de $P_A(x)$ sont 1 (racine double) et -1 (racine simple). On note $E_1(A)$ et $E_{-1}(A)$ les espaces propres associés.

- **Détermination de $E_1(A)$:** soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. On a $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1(A)$ si et seulement si

  $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, ce qui signifie que $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est solution du système

  $$\begin{cases} z = x, \\ y = y, \\ x = z. \end{cases}$$

  Donc,

  $$E_1(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix} \middle| x, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

  Une base de $E_1(A)$ est $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

- **Détermination de $E_{-1}(A)$:** soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. On a $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-1}(A)$ si et seulement si

$A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, ce qui signifie que $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ est solution du système

$$\begin{cases} z = -x, \\ y = -y, \\ x = -z. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -x, \\ y = 0. \end{cases}$$

Donc,

$$E_{-1}(A) = \left\{ \begin{pmatrix}x\\0\\-x\end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{R}. \right\}.$$

Une base de $E_{-1}(A)$ est $\left\{ \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$.

4. La réunion des bases des espaces propres donne une famille $\mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$.

Pour déterminer sa liberté, on calcule le déterminant $\det\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\0 & 1 & 0\\1 & 0 & 1\end{pmatrix}$. Par la règle de Saarus,

$$\det\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\0 & 1 & 0\\1 & 0 & 1\end{pmatrix} = 1 + 0 + 0 - (-1) - 0 - 0 = 2 \neq 0.$$

La matrice est inversible donc la famille $\mathcal{B}'$ est libre. Comme on est dans $\mathbb{R}^3$ qui est de dimension 3 et que la famille comporte 3 vecteurs, c'est bien une base de $\mathbb{R}^3$.

5. Les deux premiers vecteurs de $\mathcal{B}'$ sont des vecteurs propres de f associés à la valeur propre 1, et le dernier vecteur de la base est un vecteur propre de f associé à la valeur propre -1. On en déduit que

$$A' = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

6. Notons $\mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$. On a

$$\left\{\begin{array}{rcl} \mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} & = & \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \mathcal{P}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = (\mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'})^{-1} & = & \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{array}\right.$$

De plus, $A = \mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} A' \mathcal{P}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} A' \, \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.