DS n°4 : décompositions en éléments simples, intégration et primitives (1h30)

Exercice 1 — Calculer les intégrales et primitives suivantes.

1. $A = \displaystyle\int_0^1 (x^3 - 2x + 4)\mathrm{d}x.$

2. $B(x) = \displaystyle\int \frac{2x^2+7}{x^2+4x+4}\mathrm{d}x.$

3. $C(x) = \displaystyle\int \frac{x^3+3x^2}{x^2-1}\mathrm{d}x.$

4. $D = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \sin^4(x)\cos^3(x)\mathrm{d}x.$

5. $E = \displaystyle\int_{-1}^1 \mathrm{e}^{2x}\cos(x)\mathrm{d}x.$

6. $F(x) = \displaystyle\int (x^2 - x + 1)\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$

7. $G = \displaystyle\int_0^1 \frac{x+2}{x^2-2x+2}\mathrm{d}x.$

8. $H = \displaystyle\int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln(x)}\mathrm{d}x.$

Correction de l'exercice 1 —

1. $A = \left[\frac{1}{4}x^4 - 2\frac{1}{2}x^2 + 4x\right]_0^1 = \frac{1}{4} - 2\frac{1}{2} + 4 = \frac{13}{4}.$

2. Le dénominateur est une identité remarquable : $x^2+4x+4 = (x+2)^2$. On écrit

$$\frac{2x^2+7}{x^2+4x+4} = \frac{(2x^2+8x+8)-(8x+1)}{(x+2)^2} = 2 - \frac{8x+1}{(x+2)^2}.$$

De plus,

$$\frac{8x+1}{(x+2)^2} = \frac{8(x+2)-15}{(x+2)^2} = \frac{8}{x+2} - \frac{15}{(x+2)^2}.$$

On en déduit que

$$B(x) = \int \left(2 - \frac{8}{x+2} + \frac{15}{(x+2)^2}\right)\mathrm{d}x = 2x - 8\ln(x+2) - \frac{15}{x+2}.$$

3. On effectue une division euclidienne de x^3+3x^2 par x^2-1. Cela nous donne

$$x^3+3x^2 = (x+3)(x^2-1) + (x+3).$$

Donc,

$$\frac{x^3+3x^2}{x^2-1} = x+3+\frac{x+3}{x^2-1}.$$

Puisque $x^2-1 = (x+1)(x-1)$, on effectue la décomposition en éléments simples

$$\frac{x+3}{x^2-1} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1}.$$

On détermine a et b avec la manière classique :

$$\begin{aligned} a &= \frac{-1+3}{-1-1} = \frac{2}{-2} = -1, \\ b &= \frac{1+3}{1+1} = \frac{4}{2} = 2. \end{aligned}$$

Donc,

$$\frac{x^3+3x^2}{x^2-1} = x+3+\frac{-1}{x+1}+\frac{2}{x-1}.$$

On en déduit que

$$C(x) = \frac{1}{2}x^2+3x-\ln(1+x)+2\ln(x-1).$$

4. On réécrit

$$\sin^4(x)\cos^3(x) = \sin^4(x)(1-\sin^2(x))\cos(x).$$

On effectue le changement de variables « $y = \sin(x)$ » dans l'intégrale. Alors, $\mathrm{d}y = \cos(x)\mathrm{d}x$ et

$$D = \int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} y^4(1-y^2)\mathrm{d}y = \int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} (y^4-y^6)\mathrm{d}y.$$

On en déduit que

$$D = \left[\frac{y^5}{5}-\frac{y^7}{7}\right]_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}^5}{2^5\cdot 5}-\frac{\sqrt{2}^7}{2^7\cdot 7}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7} = \frac{1}{20\sqrt{2}}-\frac{1}{56\sqrt{2}}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}.$$

5. Puisque $\cos(x) = \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{ix})$, $\mathrm{e}^{2x}\cos(x) = \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{2x+ix})$ et

$$E = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{2+i}\,\mathrm{e}^{2x+ix}\right]_{-1}^{1} = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2+i}(\mathrm{e}^{2+i}-\mathrm{e}^{-2-i})\right).$$

Par la formule d'Euler, $\mathrm{e}^{2+i}-\mathrm{e}^{-2-i} = \mathrm{e}^2(2\cos(1))$. Donc,

$$E = 2\,\mathrm{e}^2\cos(1)\,\mathrm{Re}\left(\frac{1}{2+i}\right) = 2\,\mathrm{e}^2\cos(1)\frac{2}{3} = \frac{4}{3}\,\mathrm{e}^2\cos(1).$$

6. On effectue une première intégration par parties :

$$\begin{array}{ll} u'(x) = \mathrm{e}^{-x} & v(x) = x^2-x+1 \\ u(x) = -\,\mathrm{e}^{-x} & v'(x) = 2x-1. \end{array}$$

Donc,

$$F(x) = [-(x^2-x+1)\,\mathrm{e}^{-x}] - \int (2x-1)(-\,\mathrm{e}^{-x})\mathrm{d}x.$$

Par une deuxième intégration par parties :

$$\begin{aligned} u'(x) &= \mathrm{e}^{-x} \qquad & v(x) &= 2x-1 \\ u(x) &= -\,\mathrm{e}^{-x} \qquad & v'(x) &= 2. \end{aligned}$$

on obtient

$$\int (2x-1)(-\,\mathrm{e}^{-x})\mathrm{d}x = [(2x-1)\,\mathrm{e}^{-x}] - \int 2(\mathrm{e}^{-x})\mathrm{d}x.$$

Finalement,

$$F(x) = -(x^2-x+1)\,\mathrm{e}^{-x} - \big((2x-1)\,\mathrm{e}^{-x} - 2\,\mathrm{e}^{-x}\big) = \mathrm{e}^{-x}(-x^2+3x).$$

7. On écrit x^2-2x+2 sous forme canonique : $x^2-2x+2 = (x-1)^2+1$. On effectue le changement de variables « $y = x-1$ » dans l'intégrale. Alors,

$$G = \int_{-1}^{0} \frac{(y+1)+2}{y^2+1}\mathrm{d}y = \int_{-1}^{0} \frac{y+3}{1+y^2}\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} \frac{2y}{1+y^2}\mathrm{d}y + 3\int_{-1}^{0} \frac{1}{1+y^2}\mathrm{d}y.$$

On en déduit que

$$G = \frac{1}{2}\left[\ln(1+y^2)\right]_{-1}^{0} + 3\left[\arctan(y)\right]_{-1}^{0} = -\frac{\ln 2}{2} - 3\arctan(-1) = -\frac{\ln 2}{2} + 3\frac{\pi}{4}.$$

8. On effectue le changement de variables « $y = \ln(x)$ ». Alors, $\mathrm{d}y = \frac{1}{x}\mathrm{d}x$, $\ln(e) = 1$ et $\ln(e^2) = 2$. Donc,

$$H = \int_{1}^{2} \frac{1}{y}\mathrm{d}y = \ln(2).$$