Exercices de révision : nombres complexes, polynômes

Pierrick Le Vourc'h

1 Énoncés

1.1 Complexes

Exercice 1 (Passage d'une forme à une autre) —[indication, corrigé]

1. Écrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

$$z_1 = \frac{2-3i}{1+i}, \quad z_2 = 4\,\mathrm{e}^{i5\pi/6}.$$

2. Écrire sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :

$$z_3 = \frac{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}{2}, \quad z_4 = -\sqrt{2}+\sqrt{2}i, \quad z_5 = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{i\alpha}}.$$

Exercice 2 (Placer dans le plan cartésien) —[indication, corrigé]

Placer les points suivants dans le repère cartésien :

$$z_1 = -1+2i, \quad z_2 = 2\,\mathrm{e}^{i3\pi/4}, \quad z_3 = -1+i\sqrt{3}.$$

Exercice 3 (Calcul de fractions) —[indication, corrigé]

1. Mettre sous forme exponentielle les nombres $a = \dfrac{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}{2}$, $b = -1-i$ et $c = \dfrac{a}{b}$.
2. En déduire les valeurs de $\cos\left(\dfrac{11\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{11\pi}{12}\right)$.
3. (Question indépendante de la question 2) Calculer c^3.

Exercice 4 (Calcul de racines carrées) —[indication, corrigé]

Calculer les racines carrées complexes de $4-3i$, $10-5i$ et $1+i$.

Exercice 5 (Résolution d'équations du second degré) —[indication, corrigé]

Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{C}$:

1. $z^2 - z + 1 = 0$
2. $z^2 + (2+3i)z - (2-2i) = 0$
3. $z^4 - z^2 + 1 = 0$
4. $(z-1)^3 = z^3$.

Exercice 6 (Linéarisations) —[indication, corrigé]

Linéariser $\cos^3(\theta)$, $\sin^4(\theta)$ et $\sin^2(\theta)\cos(\theta)$.

Exercice 7 (Maintenant, l'inverse) —[indication, corrigé]

Développer $\cos(3\theta)$ en fonction des puissances de $\cos(\theta)$. Retrouver à partir de là la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

1.2 Polynômes

Exercice 8 (Pour se mettre en jambe) —[indication, corrigé]

1. Trouver le polynôme de degré inférieur ou égal à 3 tel que $P(2) = 0$, $P(5) = 0$, $P(0) = 0$ et $P(1) = 1$.
2. Trouver le polynôme de degré inférieur ou égal à 3 avec $P(1) = 0$, $P(-1) = -1$, $P(0) = 2$ et $P(2) = 4$.

Exercice 9 (Divisions euclidiennes) —[indication, corrigé]

Effectuer les divisions euclidiennes suivantes (on divise A par B) :

1. $A(x) = 3x^5 + 4x^2 + 1$ par $B(x) = x^2 + 2x + 3$,
2. $A(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ par $B(x) = x^2 + 1$.

Exercice 10 (Divisions selon les puissances croissantes) —[indication, corrigé]

Effectuer les divisions selon les puissances croissantes suivantes (on divise A par B) :

1. $A(x) = 4x + 1$ par $B(x) = x^4 + 1$, à l'ordre 2,
2. $A(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ par $B(x) = x^3 + 1$, à l'ordre 3.

Exercice 11 (Factorisation dans $\mathbb{C}[X]$, factorisation dans $\mathbb{R}[X]$) —[indication, corrigé]

Factoriser les polynômes suivants dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$:

1. $P_1(x) = x^5 - 1$
2. $P_2(x) = x^3 - 8$
3. $P_3(x) = x^4 - 2x^2 + 1$

Exercice 12 (Un petit dernier) —[indication, corrigé]

Factoriser $P(x) = x^4 + 9$ dans $\mathbb{R}[X]$, sans passer par une factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ (c'est-à-dire sans déterminer ses racines).

2 Indications

Indication 1 —[énoncé, corrigé]

1. Pour le premier, on multiplie en haut et en bas par le conjugué du dénominateur. Pour le deuxième, utiliser la formule de Moivre.
2. z_3 et z_4 se font de façon classique : calcul du module, on le met en facteur et on reconnaît des valeurs de sinus/cosinus classiques. Pour z_5, commencer par développer $e^{i\alpha}$ avec la formule de Moivre puis utiliser les propriétés de l'exponentielle.

Indication 2 —[énoncé, corrigé]

z_2 est situé sur le cercle de rayon 2. Pour z_3, si on commençait par le mettre sous forme exponentielle ?

Indication 3 —[énoncé, corrigé]

1. a a été fait dans l'exercice 1. b se fait de façon classique. Pour c, utiliser les propriétés de l'exponentielle.
2. Et si à présent on mettait c sous forme algébrique ?
3. La forme exponentielle est particulièrement bien adaptée aux calculs de puissance.

Indication 4 —[énoncé, corrigé]

Ces trois racines se calculent de façon classique. Soit $z = x + iy$ un nombre complexe. Sachant que l'on connaît z^2, que peut-on déduire comme informations ? Regarder en particulier le module, la partie réelle et la partie imaginaire. Cela donne un système qu'il faut résoudre afin d'obtenir le résultat.

Indication 5 —[énoncé, corrigé]

Je rappelle la méthode générale de résolution. On calcule le discriminant Δ, on calcule ses racines carrées (qui sont en fait opposées) δ et $-\delta$. Les solutions d'une équation de la forme $az^2+bz+c = 0$ sont alors $\dfrac{-b+\delta}{2}$ et $\dfrac{-b-\delta}{2}$.

3. Penser au changement de variables $Z = z^2$.
4. Celui-ci ne se résout pas à l'aide de la méthode décrite plus haut. On l'a fait une fois en TD : il faut diviser l'équation par z^3 (vérifier avant qu'on a le droit de faire ça !). On sait alors que $\dfrac{z-1}{z}$ est une racine troisième de l'unité...

Indication 6 —[énoncé, corrigé]

Pour les deux premiers, utiliser la formule d'Euler. Pour le dernier, se rappeler que $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$.

Indication 7 —[énoncé, corrigé]

On sait que $\cos(3\theta) = \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{i3\theta}) = \mathrm{Re}\left((\mathrm{e}^{i\theta})^3\right)$. Utiliser le binôme de Newton.

Pour la deuxième partie de la question, évaluer ce que l'on a trouvé en $\theta = \dfrac{\pi}{9}$.

Indication 8 —[énoncé, corrigé]

1. On connaît trois racines d'un polynôme de degré 3, donc on connaît le polynôme à un facteur multiplicatif près.
2. Écrire P comme un produit de $(x-1)$ avec un polynôme de degré 2 à déterminer.

Indication 9 —[énoncé, corrigé]

Appliquer l'algorithme classique de calcul de division euclidienne.

Indication 10 —[énoncé, corrigé]

Appliquer l'algorithme classique de calcul de DSPC.

Indication 11 —[énoncé, corrigé]

1. Les racines du polynôme sont les racines cinquièmes de l'unité. Pour obtenir la factorisation réelle, rassembler les racines conjuguées.
2. 2 est racine du polynôme.
3. Effectuer un changement de variable $y = x^2$.

Indication 12 —[énoncé, corrigé]

Deux méthodes sont possibles. Pour la première, on remarque que P n'a pas de racines réelles, donc il va s'écrire

$$P(x) = \lambda(x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d).$$

Reste à déterminer λ, a, b, c et d.

Pour la deuxième, mettre le polynôme sous forme canonique et reconnaître une identité remarquable.

3 Corrigés

Corrigé 1 —[énoncé, indication]

1. On commence par z_1. On multiplie le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur, puis on simplifie la fraction au maximum :

$$\begin{aligned} z_1 =& \frac{2-3i}{1+i}, \\ =& \frac{(2-3i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}, \\ =& \frac{2-2i-3i+3i^2}{1^2-i^2}, \\ =& \frac{-1-5i}{2}, \\ =& -\frac{1}{2}-i\frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Pour z_2, on a d'après la formule de Moivre que

$$\mathrm{e}^{5i\pi/6} = \cos(5\pi/6) + i\sin(5\pi/6) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}.$$

On en déduit que

$$z_2 = 4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{3} + 2i.$$

2. Calculons le module de z_3 :

$$|z_3| = \frac{1}{2}\sqrt{(\sqrt{6})^2 + (\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{8}}{2} = \sqrt{2}.$$

En mettant le module en facteur, on a

$$z_3 = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right).$$

On reconnaît là le cosinus et le sinus d'angle $\pi/6$. Donc,

$$z_3 = \sqrt{2}(\cos(\pi/6) + i\sin(\pi/6)) = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\pi/6}.$$

On procède de la même façon pour z_4. Son module vaut

$$|z_4| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{4} = 2.$$

On met le module en facteur :

$$z_4 = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

On reconnaît les cosinus et sinus d'angle $3\pi/4$, et donc

$$z_4 = 2\,\mathrm{e}^{i3\pi/4}.$$

Enfin, pour z_5, on a d'après la formule de Moivre que

$$\mathrm{e}^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i\sin(\alpha).$$

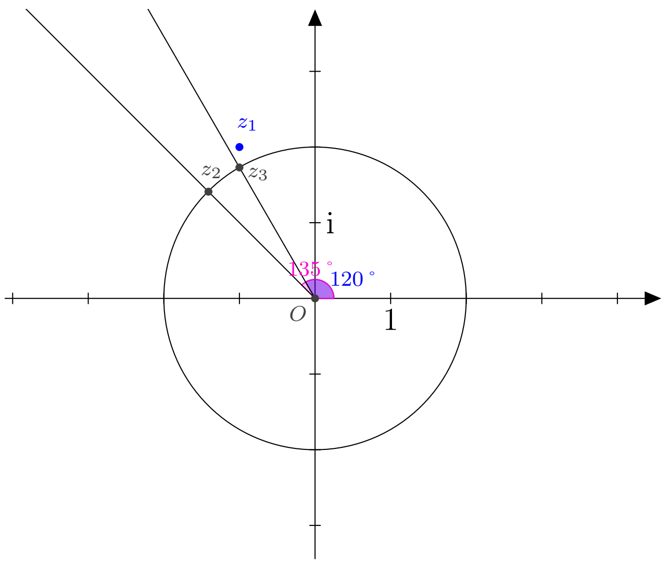
D'après les propriétés de l'exponentielle,

$$z_5 = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{i\alpha}} = \mathrm{e}^{\cos(\alpha)+i\sin(\alpha)} = \mathrm{e}^{\cos(\alpha)}\,\mathrm{e}^{i\sin(\alpha)}.$$

Comme $\mathrm{e}^{\cos(\alpha)} > 0$, on a bien trouvé la forme exponentielle de z_5.

Corrigé 2 —[énoncé, indication]

Pour z_2, on sait qu'il est placé sur le cercle de rayon 2 centré en l'origine (de par son module) et avec un angle de $3\pi/4$. Pour z_3, on n'a pas vraiment envie de placer $\sqrt{3}$ dans le plan... Mais si on le met sous forme exponentielle, $z_3 = 2\,\mathrm{e}^{i2\pi/3}$ (je ne détaille pas, il faut juste refaire comme dans l'exercice 1). Le point se situe donc sur le cercle de centre O et de rayon 2, avec un angle de $2\pi/3$.



Corrigé 3 —[énoncé, indication]

1. On sait par l'exercice 1 que $a = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\pi/6}$. Mettons à présent b sous forme exponentielle. Son module vaut

$$|b| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

On en déduit que

$$b = \sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}(\cos(-3\pi/4) + i\sin(-3\pi/4)) = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-i3\pi/4}.$$

Cela nous permet de déterminer la forme exponentielle de c en utilisant les propriétés de l'exponentielle :

$$c = \frac{\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\pi/6}}{\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-i3\pi/4}} = \mathrm{e}^{i\pi/6+i3\pi/4} = \mathrm{e}^{i\frac{2\pi+9\pi}{12}} = \mathrm{e}^{i11\pi/12}.$$

2. Mettons $c = \dfrac{\frac{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}{2}}{-1-i} = \dfrac{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}{2(-1-i)}$ sous forme algébrique.

$$\begin{aligned} c &= \frac{(\sqrt{6}+i\sqrt{2})(-2+2i)}{(-2-2i)(-2+2i)}, \\ &= \frac{(-2\sqrt{6}-2\sqrt{2}) + i(2\sqrt{6}-2\sqrt{2})}{2^2+2^2}, \\ &= \frac{(-2\sqrt{6}-2\sqrt{2}) + i(2\sqrt{6}-2\sqrt{2})}{8}, \\ &= -\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}. \end{aligned}$$

Comme nous avons $c = \mathrm{e}^{i11\pi/12} = \cos(11\pi/12) + i\sin(11\pi/12)$, par identification des parties réelles et imaginaires,

$$\left\{\begin{array}{rcl} \cos\left(\dfrac{11\pi}{12}\right) &=& -\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}, \\ \sin\left(\dfrac{11\pi}{12}\right) &=& \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}. \end{array}\right.$$

3. Puisque $c = \mathrm{e}^{i11\pi/12}$, on a $c^3 = \mathrm{e}^{i33\pi/12} = \mathrm{e}^{i11\pi/4} = \mathrm{e}^{i3\pi/4}$. En effet, $\dfrac{11\pi}{4} = 2\pi + \dfrac{3\pi}{4}$ et l'argument est défini à 2π près.

Corrigé 4 —[énoncé, indication]

- On cherche les racines carrées de $4-3i$. Soit $z = x+iy$ une de ces racines carrées. Puisque

$$z^2 = (x^2-y^2) + 2ixy = 4-3i,$$

on extrait les informations suivantes :

$$\left\{\begin{array}{rcl} |z|^2 = x^2+y^2 &=& 5 = \sqrt{4^2+(-3)^2} = |4-3i|, \\ \mathrm{Re}(z^2) = x^2-y^2 &=& 4 = \mathrm{Re}(4-3i), \\ \mathrm{Im}(z^2) = 2xy &=& -3 = \mathrm{Im}(4-3i). \end{array}\right.$$

Il se trouve que l'on a ici trop d'informations : pas besoin de connaître la valeur exacte de

xy, connaître son signe suffit. On se retrouve donc à devoir résoudre le système

$$x^2 + y^2 = 5, \tag{1a}$$
$$x^2 - y^2 = 4, \tag{1b}$$
$$xy \leqslant 0. \tag{1c}$$

En faisant la somme de (1a) et (1b), on obtient $2x^2 = 9$. En divisant par 2, $x^2 = 9/2$, et l'on déduit que

$$x = \pm \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

En faisant la différence de (1a) et (1b), on obtient $2y^2 = 1$, soit $y^2 = 1/2$, d'où l'on déduit

$$y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Puisque $xy \leqslant 0$, x et y doivent être de signe opposé. Les racines carrées de $4 - 3i$ sont donc

$$z_1 = \frac{3}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad z_2 = -\frac{3}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

- On cherche les racines carrées de $10 - 5i$. Soit $z = x + iy$ une de ces racines carrées. Puisque

$$z^2 = (x^2 - y^2) + 2ixy = 10 - 5i,$$

on a par le même raisonnement que

$$x^2 + y^2 = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}, \tag{2a}$$
$$x^2 - y^2 = 10, \tag{2b}$$
$$xy \leqslant 0. \tag{2c}$$

En faisant la somme de (2a) et (2b), on obtient $2x^2 = 5\sqrt{5} + 10$, ce qui nous donne après calcul

$$x = \pm \frac{\sqrt{5\sqrt{5} + 10}}{\sqrt{2}}.$$

En faisant la différence de (2a) et (2b), on obtient $2y^2 = 5\sqrt{5} - 10$, soit

$$y = \pm \frac{\sqrt{5\sqrt{5} - 10}}{\sqrt{2}}.$$

Puisque $xy \leqslant 0$, x et y doivent être de signe opposé. Les racines carrées de $5 - 10i$ sont donc

$$z_1 = \frac{\sqrt{5\sqrt{5} + 10}}{\sqrt{2}} - i\frac{\sqrt{5\sqrt{5} - 10}}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad z_2 = -\frac{\sqrt{5\sqrt{5} + 10}}{\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{5\sqrt{5} - 10}}{\sqrt{2}}.$$

- On peut mettre $1+i$ sous forme exponentielle : $|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$ et

$$1+i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\pi/4}\,.$$

  Les racines carrées de $1+i$ se trouvent alors de façon claire : ce sont

$$z_1 = \sqrt{(\sqrt{2})}\,\mathrm{e}^{i\pi/8} \quad \text{et} \quad z_2 = -\sqrt{(\sqrt{2})}\,\mathrm{e}^{i\pi/8}\,.$$

  On peut aussi tout à fait appliquer la méthode utilisée pour les deux premiers calculs.

Corrigé 5 —[énoncé, indication]

1. On calcule le discriminant :

$$\Delta = (-1)^2 - 4\times 1\times 1 = -3 = 3i^2.$$

Les racines carrées de Δ sont alors évidentes : il s'agit de $\delta = \sqrt{3}i$ et $-\delta = -\sqrt{3}i$. Les solutions de l'équation sont alors

$$z_1 = \frac{-(-1)+\delta}{2} = \frac{1+\sqrt{3}i}{2} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{1-\sqrt{3}i}{2}.$$

2. Calculons le discriminant de cette équation.

$$\Delta = (2+3i)^2 + 4(2-2i) = 4+12i-9+8-8i = 3+4i.$$

Cherchons les racines carrées de Δ. Soit $\delta = x+iy$ une de ces racines carrées. De la même façon qu'à l'exercice précédent, on a

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= \sqrt{9+16} = 5, && \text{(3a)}\\ x^2-y^2 &= 3, && \text{(3b)}\\ xy &\geqslant 0. && \text{(3c)} \end{aligned}$$

On en déduit, par somme de (3a) et (3b), que $2x^2 = 8$, soit

$$x = \pm 2.$$

On fait ensuite la différence de (3a) et (3b). Cela nous donne $2y^2 = 2$ soit

$$y = \pm 1.$$

Comme $xy \geqslant 0$, les racines carrées de Δ sont

$$\delta = 2+i \quad \text{et} \quad -\delta = -2-i.$$

Les solutions de l'équation $z^2 + (2+3i)z - (1-2i) = 0$ sont donc

$$z_1 = \frac{-(2+3i)+\delta}{2} = -i \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-(2+3i)-\delta}{2} = -2-2i.$$

3. On effectue le changement de variables $Z = z^2$. On cherche à résoudre l'équation $Z^2 - Z + 1 = 0$. C'est l'équation numéro 1 de l'exercice, de solutions

$$Z_1 = \frac{1+\sqrt{3}i}{2} \quad \text{et} \quad Z_2 = \frac{1-\sqrt{3}i}{2}.$$

Ce sont des nombres complexes que l'on a beaucoup utilisés dans les TDs. En particulier, on sait les mettre sous forme exponentielle :

$$Z_1 = \mathrm{e}^{i\pi/3} \quad \text{et} \quad Z_2 = \mathrm{e}^{-i\pi/3}.$$

Les solutions de l'équation $z^4 - z^2 + 1 = 0$ sont les racines carrées de Z_1 et Z_2, soit

$$z_1 = \mathrm{e}^{i\pi/6}, \quad z_2 = -\mathrm{e}^{i\pi/6}, \quad z_3 = \mathrm{e}^{-i\pi/6} \text{ et } z_4 = -\mathrm{e}^{-i\pi/6}.$$

4. Vérifions que $z = 0$ n'est pas solution de l'équation : $(0-1)^3 = (-1)^3 = -1 \neq 0 = 0^3$. Puisque $z \neq 0$, on divise l'équation par z^3. Cela nous donne

$$\frac{(z-1)^3}{z^3} = \left(\frac{z-1}{z}\right)^3 = 1.$$

On sait alors que $\frac{z-1}{z}$ est une racine troisième de l'unité, ce nombre est donc égal à 1, j ou j^2. Pour garder une généralité, on dira que ce nombre est égal à $\mathrm{e}^{i2\pi k/3}$ avec $k = 0, 1, 2$. Cela nous dit que

$$\begin{aligned} (z-1) &= z\,\mathrm{e}^{i2\pi k/3}, \\ \text{soit} \qquad z - z\,\mathrm{e}^{i2\pi k/3} &= 1; \\ \text{soit} \qquad z(1-\mathrm{e}^{i2\pi k/3}) &= 1. \end{aligned}$$

On remarque alors que si $k = 0$, alors $\mathrm{e}^{i2\pi k/3} = 1$ et l'équation devient $0 = 1$, ce qui est absurde. Donc $k = 1$ ou $k = 2$. On peut alors diviser l'équation par $1 - \mathrm{e}^{i2\pi k/3}$, ce qui donne

$$z = \frac{1}{1-\mathrm{e}^{i2\pi k/3}} = \frac{\mathrm{e}^{-i\pi k/3}}{\mathrm{e}^{-i\pi k/3} - \mathrm{e}^{i\pi k/3}} = \frac{1}{-2i\sin(\pi k/3)}\,\mathrm{e}^{-i\pi k/3}.$$

Au final, les solutions de l'équation sont

$$z_1 = \frac{1}{-2i\sin(\pi/3)}\,\mathrm{e}^{-i\pi/3} = \frac{-1}{i\sqrt{3}}\,\mathrm{e}^{-i\pi/3} \quad \text{et} z_2 = \frac{1}{-2i\sin(2\pi/3)}\,\mathrm{e}^{-i2\pi/3} = \frac{-1}{i\sqrt{3}}\,\mathrm{e}^{-i2\pi/3}.$$

REMARQUE : on peut aussi développer le $(z-1)^3$ à l'aide du binôme de Newton. L'équation $(z-1)^3 = z^3$ devient alors

$$z^3 - 3z^2 + 3z - 1 = z^3,$$

soit

$$-3z^2 + 3z - 1 = 0.$$

On s'est donc ramené à une équation du second degré classique que l'on sait résoudre.

Corrigé 6 —[énoncé, indication]

- D'après la formule d'Euler, $\cos^3(\theta) = \left(\frac{\mathrm{e}^{i\theta} + \mathrm{e}^{-i\theta}}{2}\right)^3$. On développe alors l'expression à l'aide du binôme de Newton. Cela donne

$$\cos^3(\theta) = \frac{1}{8}(\mathrm{e}^{3i\theta} + 3\,\mathrm{e}^{i\theta} + 3\,\mathrm{e}^{-i\theta} + \mathrm{e}^{-i3\theta}).$$

En regroupant chaque terme et son conjugué, et en réutilisant la formule d'Euler, on obtient que

$$\cos^3(\theta) = \frac{1}{8}(2\cos(3\theta) + 6\cos(\theta)) = \frac{1}{4}(\cos(3\theta) + 3\cos(\theta)).$$

- D'après la formule d'Euler, $\sin^4(\theta) = \left(\frac{\mathrm{e}^{i\theta} - \mathrm{e}^{-i\theta}}{2i}\right)^4 = \frac{1}{16}(\mathrm{e}^{i\theta} - \mathrm{e}^{-i\theta})^4$. D'après la formule du binôme, on a

$$\begin{aligned}\sin^4(\theta) =& \frac{1}{16}(\mathrm{e}^{i4\theta} - 4\,\mathrm{e}^{i2\theta} + 6 - 4\,\mathrm{e}^{-i2\theta} + \mathrm{e}^{-i4\theta}),\\ =& \frac{1}{16}(2\cos(4\theta) - 8\cos(2\theta) + 6),\\ =& \frac{1}{8}(\cos(4\theta) - 4\cos(2\theta) + 3).\end{aligned}$$

- Puisque $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$, on a que

$$\sin^2(\theta)\cos(\theta) = (1 - \cos^2(\theta))\cos(\theta) = \cos(\theta) - \cos^3(\theta).$$

D'après la première linéarisation que l'on a faite dans l'exercice,

$$\sin^2(\theta)\cos(\theta) = \cos(\theta) - \frac{1}{4}(\cos(3\theta) + 3\cos(\theta)) = \frac{1}{4}(-\cos(3\theta) + \cos(\theta)).$$

Corrigé 7 —[énoncé, indication]

On sait que $\cos(3\theta) = \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{i3\theta}) = \mathrm{Re}((\mathrm{e}^{i\theta})^3)) = \mathrm{Re}((\cos(\theta) i \sin(\theta))^3)$. En utilisant le binôme de Newton,

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^3 = \cos^3(\theta) + 3i\cos^2(\theta)\sin(\theta) - 3\cos(\theta)\sin^2(\theta) - i\sin^3(\theta).$$

En ne prenant que la partie réelle, on obtient

$$\cos(3\theta) = \cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)\sin^2(\theta).$$

D'après l'exercice précédent,

$$\cos(\theta)\sin^2(\theta) = \frac{1}{4}(-\cos(3\theta) + \cos(\theta)).$$

On en déduit que

$$\cos(3\theta) = \cos^3(\theta) - \frac{3}{4}(-\cos(3\theta) + \cos(\theta)),$$

soit

$$\frac{1}{4}\cos(3\theta) = \cos^3(\theta) - \frac{3}{4}\cos(\theta).$$

Évaluons notre équation en $\theta = \pi/6$. On a

$$\frac{1}{4}\cos(\pi/2) = \cos^3(\pi/6) - \frac{1}{4}\cos(\pi/6).$$

Comme $\cos(\pi/2) = 0$, on a que $x = \cos(\pi/6)$ est solution de l'équation

$$x^3 - \frac{3}{4}x = 0.$$

$x = 0$ est solution de l'équation, mais on sait que $\cos(\pi/6)$ n'est pas nul. On peut donc diviser l'équation par x, ce qui nous dit que

$$x^2 - \frac{3}{4} = 0,$$

soit

$$x^2 = \frac{3}{4}.$$

Finalement, les solutions de l'équation en x sont

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad x = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Puisque $\cos(\pi/6)$ est positif, on en déduit que

$$\cos(\pi/6) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Corrigé 8 —[énoncé, indication]

1. P est un polynôme de racines 2, 5 et 0. On sait donc que les polynômes $x-2$, $x-5$ et x divisent P. Il existe donc un polynôme $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que

$$P(x) = x(x-2)(x-5)Q.$$

Or, en calculant les degrés, on a

$$\deg(P) = \deg(x) + \deg(x-2) + \deg(x-5) + \deg(Q) = 3\deg(Q) \leqslant 3.$$

On en déduit que Q est de degré 0, c'est donc une constante. On détermine sa valeur en évaluant P en 1 :

$$P(1) = 1 = 1(1-2)(1-5)Q = 4Q.$$

Donc $Q = 1/4$. Finalement, P est le polynôme

$$P(x) = \frac{1}{4}x(x-2)(x-5).$$

2. 1 est racine de P, donc on sait que P s'écrit

$$P(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c).$$

Il reste à trouver a, b et c. En évaluant le polynôme en $x = -1$, $x = 0$ et $x = 2$, on a

$$\begin{aligned} P(-1) = -2(a-b+c) &= -1, \\ P(0) = -c &= 2, \\ P(2) = (4a+2b+c) &= 4. \end{aligned}$$

Puisque l'on a $c = -2$ par la deuxième équation, il reste à résoudre le système

$$\begin{cases} 2a - 2b &= -5, \\ 4a + 2b &= 6. \end{cases}$$

En faisant la somme de ces deux équations, on a

$$6a = 1.$$

En faisant la différence de ces équations, on a

$$2a + 4b = \frac{1}{3} + 4b = 11,$$

soit

$$b = \frac{8}{3}.$$

Le polynôme est donc

$$P(x) = \frac{1}{6}(x-1)(x^2 + 16x - 12).$$

Corrigé 9 —[énoncé, indication]

1.

$$\begin{array}{l|l}
3x^5+4x^2+1 & \underline{x^2+2x+3} \\
\underline{-(3x^5+6x^4+9x^3)} & 3x^3-6x^2+3x+16 \\
-6x^4-9x^3+4x^2+1 & \\
\underline{-(-6x^4-12x^3-18x^2)} & \\
3x^3+22x^2+1 & \\
\underline{-(3x^3+6x^2+9x)} & \\
16x^2-9x+1 & \\
\underline{-(16x^2+32x+48)} & \\
-41x-47. &
\end{array}$$

On a bien un reste $R(x) = -41x - 47$ de degré $1 < 2 = \deg(B)$, donc la division euclidienne de A par B est

$$A(x) = (3x^3 - 6x^2 + 3x + 16)B(x) - 41x - 47.$$

2.

$$\begin{array}{l|l}
x^4+x^3+x^2+x+1 & \underline{x^2+1} \\
\underline{-(x^4+x^2)} & x^2+x \\
x^3+x+1 & \\
\underline{-(x^3+x)} & \\
1. &
\end{array}$$

On a bien un reste $R(x) = 1$ de degré $0 < 2 = \deg(B)$, donc la division euclidienne de A par B est

$$A(x) = (x^2 + x)B(x) + 1.$$

Corrigé 10 —[énoncé, indication]

1.

$$\begin{array}{l|l}
1+4x & \underline{1+x^4} \\
\underline{-(1+x^4)} & 1+4x \\
4x-x^4 & \\
\underline{-(4x+4x^5)} & \\
-x^4-4x^5. &
\end{array}$$

On a bien $\deg(1 + 4x) \leqslant 2$ et x^3 divise $-x^4 - 4x^5$. La DSPC de A par B est donc

$$A(x) = B(x)(1 + 4x) + x^3(-x - 4x^2).$$

$$\begin{array}{l|l}
1 + x + x^2 + x^3 + x^4 & \underline{1 + x^3} \\
\underline{-(1 + x^3)} & 1 + x + x^2 \\
x + x^2 + x^4 & \\
\underline{-(x + x^4)} & \\
x^2 & \\
\underline{-(x^2 + x^5)} & \\
-x^5. &
\end{array}$$

On a bien $\deg(1 + x + x^2) \leqslant 3$ et x^4 divise $-x^5$. La DSPC de A par B est donc

$$A(x) = B(x)(1 + x + x^2) + x^4(-x).$$

Corrigé 11 —[énoncé, indication]

1. Les racines de P_1 sont les racines cinquièmes de l'unité. P_1 étant unitaire, il s'écrit

$$P_1(x) = (x - 1)(x - \mathrm{e}^{i2\pi/5})(x - \mathrm{e}^{i4\pi/5})(x - \mathrm{e}^{i6\pi/5})(x - \mathrm{e}^{i8\pi/5}).$$

On a factorisé le polynôme dans $\mathbb{C}[X]$.

Pour passer à la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$, on va écrire les arguments entre $-\pi$ et π plutôt qu'entre 0 et 2π :

$$P_1(x) = (x - 1)(x - \mathrm{e}^{i2\pi/5})(x - \mathrm{e}^{i4\pi/5})(x - \mathrm{e}^{-i4\pi/5})(x - \mathrm{e}^{-i2\pi/5}).$$

On rassemble alors les facteurs de racines conjuguées de la façon suivante pour $k = 1, 2$:

$$(x - \mathrm{e}^{i2k\pi/5})(x - \mathrm{e}^{-i2k\pi/5}) = x^2 - 2\cos(2k\pi/5)x + 1.$$

On obtient alors que

$$P_1(x) = (x - 1)(x^2 - 2\cos(2\pi/5) + 1)(x^2 - 2\cos(4\pi/5)x + 1).$$

On a factorisé P_1 dans $\mathbb{R}[X]$.

2. Remarquons tout d'abord que $2^3 = 8$, donc 2 est une racine de P_2, donc $(x - 2)$ divise P_2. Effectuons la division euclidienne de P_2 par $x - 2$:

$$
\begin{array}{l|l}
x^3 - 8 & \underline{x-2} \\
\underline{-(x^3 - 2x^2)} & x^2 + 2x + 4 \\
2x^2 - 8 & \\
\underline{-(2x^2 - 4x)} & \\
4x - 8 & \\
\underline{-(4x - 8)} & \\
0 &
\end{array}
$$

On a donc que $P_2(x) = (x-2)(x^2+2x+4)$. Il reste à trouver les racines (complexes) du polynôme x^2+2x+4. Son discriminant est $\Delta = 2^2 - 16 = -12$. Les racines complexes de Δ sont $\delta = 2\sqrt{3}i$ et $-\delta$, donc les racines de x^2+2x+4 sont

$$z_1 = \frac{-2+2\sqrt{3}i}{2} = -1 + i\sqrt{3} \quad \text{et} \quad z_2 = -1 - i\sqrt{3}.$$

Le polynôme $P_2(x)$ se factorise donc dans $\mathbb{C}[X]$ sous la forme

$$P_2(x) = (x-2)(x-z_1)(x-z_2).$$

La factorisation dans $\mathbb{R}[X]$, quant à elle, est donnée par

$$P_2(x) = (x-2)(x^2+2x+4),$$

puisque le polynôme x^2+2x+4 est irréductible dans $\mathbb{R}$.

3. On effectue le changement de variables $y = x^2$. On a $P_3(y) = y^2 - 2y + 1$. On reconnaît alors une identité remarquable :

$$P_3(y) = (y-1)^2.$$

On en déduit que

$$P_3(x) = (x^2-1)^2 = ((x-1)(x+1))^2 = (x-1)^2(x+1)^2.$$

On a factorisé P_3 dans $\mathbb{R}[X]$ (et donc dans $\mathbb{C}[X]$).

Corrigé 12 —[énoncé, indication]

Deux méthodes de résolution sont possibles.

La méthode bourrine On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^4 \geqslant 0$, donc P n'a pas de racines réelles. Pour autant, on peut factoriser P comme le produit de deux polynômes de degré 2. Comme P est unitaire, il s'écrit

$$P(x) = (x^2+ax+b)(x^2+cx+d).$$

On développe alors cette factorisation :

$$P(x) = x^4 + (a+c)x^3 + (b+d+ac)x^2 + (ad+cb)x + bd = x^4 + 9.$$

Par identification terme-à-terme,

$$\begin{cases} a+c &= 0, \\ b+d+ac &= 0, \\ ad+bc &= 0, \\ bd &= 9 \end{cases}$$

On a donc

$$\begin{cases} a &= -c, \\ b+d-c^2 &= 0, \\ c(b-d) &= 0, \\ bd &= 9. \end{cases}$$

La troisième équation nous dit que soit $c = 0$ soit $b = d$. Dans le cas où $c = 0$, la deuxième équation nous dit que $b = -d$, or en réinjectant cela dans la dernière équation, on a $-d^2 = 9$, ce qui est absurde (on a un nombre positif à droite et un nombre négatif à gauche). Donc, $b = d$. On se retrouve alors à devoir résoudre

$$\begin{cases} a &= -c, \\ 2d &= c^2, \\ d^2 = 9, \\ b = d. \end{cases}$$

La troisième équation nous dit que $d = \pm 3$, or comme $2d = c^2$, d est forcément positif. Donc $b = d = 3$. On en déduit que $c^2 = a^2 = 6$, donc a et c sont les deux racines opposées de 6. Par symétrie du problème, on choisit de prendre $a = \sqrt{6}$ et $c = -\sqrt{6}$. Finalement, P se factorise sous la forme

$$P(x) = (x^2 + \sqrt{6}x + 3)(x^2 - \sqrt{6}x + 3).$$

La méthode plus subtile On met l'équation sous forme canonique. Puisque $9 = 3^2$, on écrit que

$$P(x) = (x^4 + 6x^2 + 9) - 6x^2 = (x^2+3)^2 - 6x^2.$$

On se retrouve avec une identité remarquable de la forme $a^2 - b^2$, que l'on sait factoriser :

$$P(x) = (x^2 + 3 - \sqrt{6}x)(x^2 + 3 + \sqrt{6}x).$$