SAE : espaces vectoriels (30mn)

Exercice 1 — Montrer que la famille $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ est libre dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2 — On considère la famille suivante de vecteurs de $\mathbb{R}^2$:

$$S = \left\{ \vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{e_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

1. Montrer que S est une base de $\mathbb{R}^2$.

2. Calculer les coordonnées de $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ dans cette base.

Exercice 3 — **BONUS** : trouver une base de

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \middle| x - y = 0 \right\}.$$

Tracer F dans le plan.

Corrigé

Correction de l'exercice 1 — Soient λ, μ, ν des réels tels que

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Résoudre cette équation vectorielle (d'inconnues λ, μ et ν) revient à résoudre le système

$$\begin{cases} \lambda + 2\mu + \nu &= 0, \quad (L_1) \\ -\lambda + \nu &= 0, \quad (L_2) \\ -5\mu + \nu &= 0. \quad (L_3) \end{cases}$$

La deuxième équation nous dit que $\lambda = \nu$. La troisième équation nous dit que $5\mu = \nu$ donc $\mu = \frac{\nu}{5}$. On réinjecte tout cela dans la première équation :

$$\nu + \frac{2}{5}\nu + \nu = 0,$$

soit

$$\frac{12}{5}\nu = 0.$$

Donc $\nu = 0$ et on en déduit que λ et μ sont aussi nuls. La famille est donc libre.

Correction de l'exercice 2 —

- Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^2$. On va montrer qu'il existe a et b des réels tels que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a\vec{e_1} + b\vec{e_2}.$$

  Si on montre cela, on aura montré que la famille S est génératrice. Comme son cardinal (son nombre d'éléments) est égal à la dimension de $\mathbb{R}^2$ (donc égal à deux), si elle est génératrice, c'est automatiquement une base.

  Trouver a et b revient à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} a - b &= x, \quad (L_1) \\ a + b &= y, \quad (L_2) \end{cases}$$

  En effectuant la somme de (L_1) et (L_2), on obtient que

$$2a = x + y \text{ soit } a = \frac{x+y}{2}.$$

En effectuant la différence $(L_2) - (L_1)$, on obtient que

$$2b = \frac{y-x}{2} \text{ soit } b = \frac{y-x}{2}.$$

Finalement,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{x+y}{2}\vec{e_1} + \frac{y-x}{2}\vec{e_2}.$$

On a bien que la famille S est génératrice.

- Pour exprimer $\vec{v}$ dans la base S, il suffit de reprendre ce que l'on a fait dans la question 1 avec $x = 3$ et $y = -4$:

$$\vec{v} = \frac{3+(-4)}{2}\vec{e_1} + \frac{-4-3}{2}\vec{e_2} = \frac{-1}{2}\vec{e_1} + \frac{-7}{2}\vec{e_2}.$$

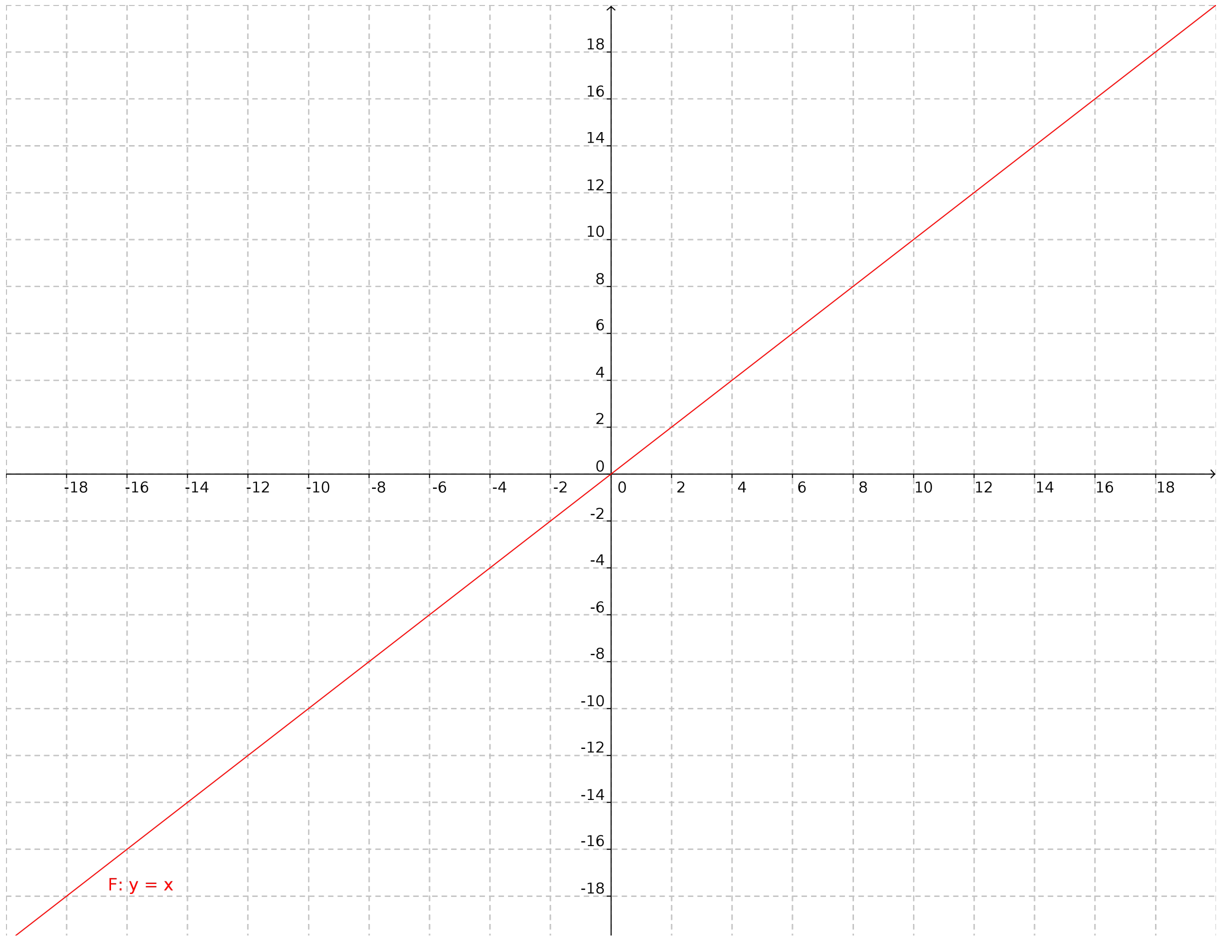
Correction de l'exercice 3 — On travaille dans $\mathbb{R}^2$ qui est de dimension 2, et on applique une contrainte sur les vecteurs pour obtenir F. F est donc de dimension 1 : c'est une droite. Pour en trouver une base, il suffit donc de trouver un vecteur non nul qui appartient à F. C'est le cas du vecteur

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

En effet, on a bien $1 - 1 = 0$.

Une base de F est donc donnée par $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Si l'on regarde les éléments de F, ils sont donnés par l'équation $x_y = 0$, qui se réécrit $x = y$. F est donc la droite d'équation $y = x$, que l'on trace sur le graphe ci-dessous :


F: y = x