

Objectifs

Dérivation d'un modèle moyenné par réduction de dimension : en s'inspirant de dérivations formelles existantes [4] [8], on met en place une stratégie de réduction de dimension pour un écoulement compressible barotrope stratifié avec conditions de type Navier à l'interface. On espère ainsi retrouver formellement des modèles moyennés classiques de la littérature, comme celui proposé dans [1]. En effectuant un deuxième passage à la limite, on peut dériver un modèle à partir d'un écoulement avec conditions de Dirichlet à l'interface.

Convergence de Navier-Stokes vers un modèle limite : la procédure précédente avec conditions de Dirichlet à l'interface fournit un modèle moyenné en 2D avec une vitesse et une pression pour le mélange, qui est strictement hyperbolique. On cherche à montrer que les solutions au problème de Navier-Stokes convergent fortement vers les solutions du système moyenné grâce à une stratégie d'entropie relative [6, 7, 9].

Modèle microscopique

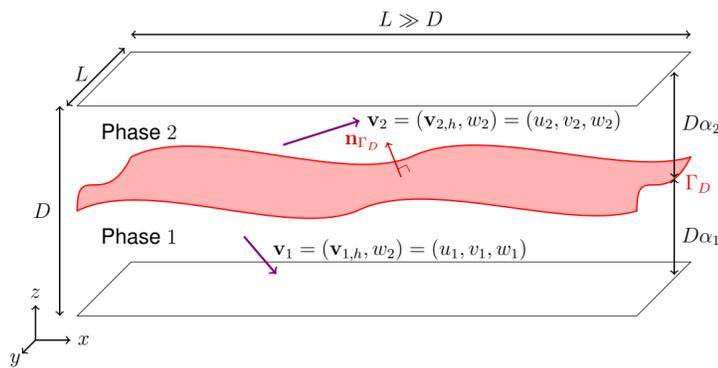


FIGURE 1 – Configuration de l'écoulement.

On considère un écoulement barotrope en couche mince : $\varepsilon = D/L \ll 1$, $p_k = p_k(\rho_k)$ pour $k = 1, 2$. On suppose que l'interface est décrite par le graphe d'une fonction $D\alpha_1$ indépendante de z et que $w_k = O(\varepsilon)$ pour $k = 1, 2$. Chaque fluide vérifie un système de type Navier-Stokes compressible visqueux sur le domaine qu'il occupe. Les coefficients de viscosité et de frottement peuvent dépendre de ε . Cela donne :

• **Navier-Stokes** :

$$\partial_t \rho_k + \nabla \cdot (\rho_k \mathbf{v}_k) = 0, \quad (1)$$

$$\partial_t (\rho_k \mathbf{v}_k) + \nabla \cdot (\rho_k \mathbf{v}_k \otimes \mathbf{v}_k) + \nabla p_k = \nabla \cdot \mathbb{S}_k(\nabla \mathbf{v}_k), \quad (2)$$

avec

$$\mathbb{S}_k(\nabla \mathbf{v}_k) = \mu_k (\nabla \mathbf{v}_k + (\nabla \mathbf{v}_k)^T) + (\eta_k - \frac{2}{3} \mu_k) \nabla \cdot \mathbf{v}_k \text{Id}.$$

• **Conditions au bord du tuyau** :

$$\mathbf{v}_k \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0 \quad \text{et} \quad (\mathbb{S}_k(\nabla \mathbf{v}_k) \mathbf{n} + \kappa_k \mathbf{v}_k)_{\text{tan}}|_{\partial\Omega} = 0. \quad (3)$$

• **Conditions à l'interface** :

$$((-p_1 \text{Id} + \mathbb{S}_1(\nabla \mathbf{v}_1)) \mathbf{n}_\Gamma) \Big|_{z=D\alpha_1} = ((-p_2 \text{Id} + \mathbb{S}_2(\nabla \mathbf{v}_2)) \mathbf{n}_\Gamma) \Big|_{z=D\alpha_1}, \quad (4)$$

$$(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n}_\Gamma) \Big|_{z=D\alpha_1} = (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{n}_\Gamma) \Big|_{z=D\alpha_1}, \quad (5)$$

$$((-p_1 \text{Id} + \mathbb{S}_1(\nabla \mathbf{v}_1)) \mathbf{n}_\Gamma + \kappa_1 (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2))_{\text{tan}} \Big|_{z=D\alpha_1} = 0. \quad (6)$$

Protocole

- Adimensionnement** : introduction de dimensions caractéristiques liées aux différentes grandeurs du problème et changement d'échelle pour ne faire apparaître qu'un seul paramètre $\varepsilon = D/L \ll 1$ et obtenir des équations en fonction des grandeurs adimensionnées avec une dépendance explicite en ε .
- Analyse asymptotique** : on choisit de négliger certains termes dans les équations et les conditions de bord en fonction de leur dépendance en ε .
- Moyennisation** : intégration des équations asymptotiques sur la hauteur respective des fluides. On obtient un système d'équations sur les grandeurs moyennes, décrivant donc un écoulement diphasique en deux dimensions.
- Fermeture des équations** : l'intégration des équations fait apparaître des termes de bord, que l'on exprime en fonction des grandeurs moyennes à l'aide des conditions au bord et à l'interface.
- Limite** $\varepsilon \rightarrow 0$ et identification du modèle 2D obtenu.

Obtention de modèles moyennés

Notations : Pour f une fonction définie sur le domaine occupé par le fluide k , on note

$$\bar{f} = \frac{1}{\alpha_k} \int f(z) dz \quad \text{et} \quad \hat{f} = \overline{\rho_k f} / \overline{\rho_k}, \quad \nabla_h f = (\partial_x f, \partial_y f).$$

Équations moyennées :

$$\partial_t (\alpha_1 \bar{\rho}_1) + \nabla_h \cdot (\alpha_1 \bar{\rho}_1 \widehat{\mathbf{v}}_{1,h}) = 0, \quad (7)$$

$$\partial_t (\alpha_2 \bar{\rho}_2) + \nabla_h \cdot (\alpha_2 \bar{\rho}_2 \widehat{\mathbf{v}}_{2,h}) = 0, \quad (8)$$

$$\partial_t (\alpha_1 \bar{\rho}_1 \widehat{\mathbf{v}}_{1,h}) + \nabla_h \cdot (\alpha_1 (\bar{\rho}_1 \widehat{\mathbf{v}}_{1,h} \otimes \widehat{\mathbf{v}}_{1,h} + \widehat{F}_1^\varepsilon)) = -\frac{\kappa_1}{\varepsilon} \widehat{\mathbf{v}}_{1,h} - \frac{\kappa_1}{2\varepsilon} (\widehat{\mathbf{v}}_{1,h} - \widehat{\mathbf{v}}_{2,h}) + F_1^\varepsilon(\alpha_1) \nabla_h \alpha_1 + R, \quad (9)$$

$$\partial_t (\alpha_2 \bar{\rho}_2 \widehat{\mathbf{v}}_{2,h}) + \nabla_h \cdot (\alpha_2 (\bar{\rho}_2 \widehat{\mathbf{v}}_{2,h} \otimes \widehat{\mathbf{v}}_{2,h} + \widehat{F}_2^\varepsilon)) = -\frac{\kappa_2}{\varepsilon} \widehat{\mathbf{v}}_{2,h} + \frac{\kappa_2}{2\varepsilon} (\widehat{\mathbf{v}}_{1,h} - \widehat{\mathbf{v}}_{2,h}) + F_2^\varepsilon(\alpha_1) \nabla_h \alpha_2 + R, \quad (10)$$

où $R = O\left(\mu + \kappa_i \frac{\kappa + \varepsilon}{\mu} + \varepsilon^2 \frac{\kappa^2 + \varepsilon^2}{\mu^2}\right)$.

Discussion sur les coefficients μ , κ et κ_i : pour que les termes d'erreur tendent vers 0 et que les termes sources de nos équations ne dépendent pas de ε à la limite, on impose

$$\forall k = 1, 2, \quad \mu_k = \tilde{\mu}_k \varepsilon^\tau, \quad 0 < \tau \leq 2, \quad \kappa_k = \tilde{\kappa}_k \varepsilon^\xi, \quad \xi > 1 \quad \text{et} \quad \kappa_i = \tilde{\kappa}_i \varepsilon.$$

Discussion sur les pressions : à la limite, les flux effectifs sont égaux aux pressions, et les pressions sont indistinguables. On se retrouve avec un modèle à une pression.

Modèle final :

$$\partial_t (\alpha_1 \bar{p}_1) + \nabla_h \cdot (\alpha_1 \bar{p}_1 \widehat{\mathbf{v}}_{1,h}) = 0, \quad (11)$$

$$\partial_t (\alpha_2 \bar{p}_2) + \nabla_h \cdot (\alpha_2 \bar{p}_2 \widehat{\mathbf{v}}_{2,h}) = 0, \quad (12)$$

$$\partial_t (\alpha_1 \bar{p}_1 \widehat{\mathbf{v}}_{1,h}) + \nabla_h \cdot (\alpha_1 \bar{p}_1 \widehat{\mathbf{v}}_{1,h} \otimes \widehat{\mathbf{v}}_{1,h} + \alpha_1 \bar{p}_1) - p_i \nabla_h \alpha_1 = -\frac{\tilde{\kappa}_i}{2} (\widehat{\mathbf{v}}_{1,h} - \widehat{\mathbf{v}}_{2,h}), \quad (13)$$

$$\partial_t (\alpha_2 \bar{p}_2 \widehat{\mathbf{v}}_{2,h}) + \nabla_h \cdot (\alpha_2 \bar{p}_2 \widehat{\mathbf{v}}_{2,h} \otimes \widehat{\mathbf{v}}_{2,h} + \alpha_2 \bar{p}_2) - p_i \nabla_h \alpha_2 = \frac{\tilde{\kappa}_i}{2} (\widehat{\mathbf{v}}_{1,h} - \widehat{\mathbf{v}}_{2,h}), \quad (14)$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 1, \quad (15)$$

$$p_i := \bar{p}_1 = p_1(\bar{p}_1) = p_2(\bar{p}_2) = \bar{p}_2. \quad (16)$$

Commentaires sur le modèle (11)-(16) :

- Ce modèle est la version isentropique du modèle diphasique standard proposé dans [3] et [5], dit à deux vitesses et une pression. Il est non-hyperbolique, mais on peut le stabiliser à l'aide de termes supplémentaires, voir par exemple [2].
- À la limite $\tilde{\kappa}_i \rightarrow +\infty$, on rejoint le cas où les conditions à l'interface sont de type Dirichlet. On obtient alors un modèle à une pression et une vitesse qui est strictement hyperbolique.

Convergence dans le cas Dirichlet

Notations : Si $(s_1, s_2) \in \mathbb{R}_+^2$ et $f = p, \kappa, \mathbb{S}$, on note $f(s_1, s_2) = \frac{s_1}{s} f_1(s_1) + \frac{s_2}{s} f_2(s_2)$. On note $\rho^\varepsilon = \rho_1^\varepsilon + \rho_2^\varepsilon$ et $r = r_1 + r_2$.

Modèle microscopique

En notant $\nabla_\varepsilon = (\nabla_h, \frac{1}{\varepsilon} \partial_z)$, on étudie le système (1)-(4) avec conditions de Dirichlet à l'interface, posé sur $\Omega = \mathbb{T} \times (0, 1)$:

$$\partial_t \rho_1^\varepsilon + \nabla_\varepsilon \cdot (\rho_1^\varepsilon \mathbf{v}^\varepsilon) = 0, \quad (17)$$

$$\partial_t \rho_2^\varepsilon + \nabla_\varepsilon \cdot (\rho_2^\varepsilon \mathbf{v}^\varepsilon) = 0, \quad (18)$$

$$\partial_t (\rho^\varepsilon \mathbf{v}^\varepsilon) + \nabla_\varepsilon \cdot (\rho^\varepsilon \mathbf{v}^\varepsilon \otimes \mathbf{v}^\varepsilon) + \nabla_\varepsilon p(\rho_1^\varepsilon, \rho_2^\varepsilon) = \nabla_\varepsilon \cdot (\mathbb{S}(\rho_1^\varepsilon, \rho_2^\varepsilon, \nabla_\varepsilon \mathbf{v}^\varepsilon)), \quad (19)$$

$$(\mathbb{S}(\rho_1^\varepsilon, \rho_2^\varepsilon, \nabla_\varepsilon \mathbf{v}^\varepsilon) \mathbf{n} + \kappa(\rho_1^\varepsilon, \rho_2^\varepsilon) \mathbf{v}^\varepsilon)_{\text{tan}}|_{\partial\Omega} = 0, \quad \mathbf{v}^\varepsilon \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0. \quad (20)$$

Le système (17)-(20) admet des solutions faibles globales qui vérifient l'inégalité d'énergie

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \int_\Omega \left(\frac{1}{2} \rho^\varepsilon |\mathbf{v}^\varepsilon|^2 + H(\rho_1^\varepsilon, \rho_2^\varepsilon) \right) (t) dx + \int_0^t \int_\Omega \mathbb{S}(\rho_1^\varepsilon, \rho_2^\varepsilon, \nabla_\varepsilon \mathbf{v}^\varepsilon) : \nabla_\varepsilon \mathbf{v}^\varepsilon(\tau) dx d\tau + \int_0^t \int_{\partial\Omega} \kappa(\rho_1^\varepsilon, \rho_2^\varepsilon) |\mathbf{v}^\varepsilon|^2(\tau) d\sigma d\tau \leq \int_\Omega \left(\frac{1}{2} \rho^\varepsilon |\mathbf{v}^\varepsilon|^2 + H(\rho_1^\varepsilon, \rho_2^\varepsilon) \right) (0) dx,$$

où $H(\rho_1^\varepsilon, \rho_2^\varepsilon)$ est une fonction satisfaisant

$$(\rho_1^\varepsilon, \rho_2^\varepsilon) \cdot \nabla H(\rho_1^\varepsilon, \rho_2^\varepsilon) - H(\rho_1^\varepsilon, \rho_2^\varepsilon) = p(\rho_1^\varepsilon, \rho_2^\varepsilon).$$

Modèle limite

On considère la réécriture de (11)-(16) dans le cas de conditions de Dirichlet à l'interface.

$$\partial_t r_1 + \nabla_h \cdot (r_1 \mathbf{u}) = 0, \quad (21)$$

$$\partial_t r_2 + \nabla_h \cdot (r_2 \mathbf{u}) = 0, \quad (22)$$

$$\partial_t (r \mathbf{u}) + \nabla_h \cdot (r \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla_h p(r_1, r_2) = 0, \quad (23)$$

$$p(r_1, r_2) := p_1(r_1) = p_2(r_2). \quad (24)$$

Le système (21)-(24) admet des solutions fortes locales qui vérifient l'équation d'énergie

$$\forall t \in (0, T), \quad \int_\mathbb{T} \left(\frac{1}{2} r |\mathbf{u}|^2 + H(r_1, r_2) \right) (t) dx = \int_\mathbb{T} \left(\frac{1}{2} r |\mathbf{u}|^2 + H(r_1, r_2) \right) (0) dx.$$

Convergence des solutions

On introduit la fonctionnelle d'entropie relative

$$\mathcal{E}(\rho_1^\varepsilon, \rho_2^\varepsilon, \mathbf{v}^\varepsilon | r_1, r_2, \mathbf{U}) = \int_\Omega \left[\frac{1}{2} \rho^\varepsilon |\mathbf{v}^\varepsilon - \mathbf{U}|^2 + E(\rho_1^\varepsilon, \rho_2^\varepsilon, r_1, r_2) \right] dx \quad (25)$$

avec

$$E(\rho_1^\varepsilon, \rho_2^\varepsilon, r_1, r_2) = H(\rho_1^\varepsilon, \rho_2^\varepsilon) - H(r_1, r_2) - (\rho_1^\varepsilon - r_1, \rho_2^\varepsilon - r_2) \cdot \nabla H(r_1, r_2) \quad \text{et} \quad \mathbf{U} = (\mathbf{u}, 0).$$

Cette fonctionnelle joue le rôle d'une distance entre les solutions faibles de (17)-(20) et les solutions fortes de (21)-(24).

Il existe $C > 0$ tel que pour toute solution faible de (17)-(20) et toute solution forte de (21)-(24),

$$\forall t \in (0, T), \quad \mathcal{E}(\rho_1^\varepsilon, \rho_2^\varepsilon, \mathbf{v}^\varepsilon | r_1, r_2, \mathbf{U})(t) \leq C \mathcal{E}(\rho_1^\varepsilon, \rho_2^\varepsilon, \mathbf{v}^\varepsilon | r_1, r_2, \mathbf{U})(0). \quad (26)$$

Bibliographie

- BAER, M. R., AND NUNZIATO, J. W. A Two-Phase Mixture Theory for the Deflagration-to-Detonation Transition (DDT) in Reactive Granular Materials. *International Journal of Multiphase Flow* 12, 6 (Nov. 1986), 861–889.
- BRESCH, D., DESJARDINS, B., GHIDAGLIA, J.-M., AND GRENIER, E. Global Weak Solutions to a Generic Two-Fluid Model. *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 196, 2 (May 2010), 599–629.
- DREW, D. A., AND PASSMAN, S. L. *Theory of Multicomponent Fluids*, vol. 135 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer New York, New York, NY, 1999.
- GERBEAU, J.-F., AND PERTHAME, B. Derivation of Viscous Saint-Venant System for Laminar Shallow Water; Numerical Validation. *Discrete & Continuous Dynamical Systems - B* 1, 1 (2001), 89–102.
- ISHII, M., AND HIBIKI, T. *Thermo-Fluid Dynamics of Two-Phase Flow*, 2nd ed ed. Springer, New York, 2011.
- JIN, B. J., AND NOVOTNÝ, A. Weak-strong uniqueness for a bi-fluid model for a mixture of non-interacting compressible fluids. *Journal of Differential Equations* 268, 1 (Dec. 2019), 204–238.
- MALTESE, D., AND NOVOTNÝ, A. Compressible Navier-Stokes equations on thin domains. *Journal of Mathematical Fluid Mechanics* 16, 3 (Sept. 2014), 571–594. Publisher: Birkhäuser Verlag AG.
- STEWART, H. B., AND WENDROFF, B. Two-phase flow: Models and methods. *Journal of Computational Physics* 56, 3 (Dec. 1984), 363–409.
- SUEUR, F. On the inviscid limit for the compressible navier-stokes system in an impermeable bounded domain. *Journal of Mathematical Fluid Mechanics* 16, 1 (2014), 163–178. Publisher: Birkhäuser Verlag AG.