Dérivation et analyse de modèles d'écoulements diphasiques compressibles

Pierrick Le Vourc'h (IMAG, Université de Montpellier)
Sous la direction de Khaled Saleh (ICJ, Université Claude Bernard Lyon 1) et Nicolas Seguin (Inria)

Projet de thèse

Motivations : Les écoulements multiphasiques compressibles interviennent dans plusieurs champs de l'industrie. On retrouve de tels écoulements dans les chambres de combustion de lanceurs spatiaux ou encore dans les circuits de refroidissement de réacteurs nucléaires.

- **Besoins :** Modèles d'écoulements macroscopiques pour décrire ces différentes situations.
- **Apports de la thèse :** Les modèles existants ont des termes sources qui sont déterminés empiriquement. Dans cette thèse, on cherche à obtenir une stratégie de dérivation de modèles où les termes sources découlent plutôt de considérations mathématiques.

Objectifs : Cette thèse comprend différents aspects.

1. **Dérivation de modèles :** on étudie des limites asymptotiques des équations de Navier-Stokes compressibles afin de dériver des modèles d'écoulements macroscopiques. La stratégie de dérivation sera déterminée en fonction de la situation.

   Exemples de limites asymptotiques : réduction de dimension [SW84, GP01], homogénéisation [BBL22], moyenne statistique [DP99, IH11].

   En particulier, dans le cas d'écoulements diphasiques, on cherchera à justifier le modèle de Baer-Nunziato [BN86] :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \partial_t\alpha_1 + v_i\partial_x\alpha_1 &=& \theta_p(p_1-p_2), \\ \partial_t(\alpha_1\rho_1) + \partial_x(\alpha_1\rho_1u_1) &=& 0, \\ \partial_t(\alpha_1\rho_1u_1) + \partial_x(\alpha_1\rho_1u_1^2+\alpha_1p_1) - p_i\partial_x\alpha_1 &=& \theta_u(u_2-u_1), \\ \partial_t(\alpha_2\rho_2) + \partial_x(\alpha_2\rho_2u_2) &=& 0, \\ \partial_t(\alpha_2\rho_2u_2) + \partial_x(\alpha_2\rho_2u_2^2+\alpha_2p_2) - p_i\partial_x\alpha_2 &=& \theta_u(u_1-u_2). \end{array}\right. \tag{1}$$

   Ce modèle fait intervenir les fractions volumiques α ainsi que les moyennes des densités ρ, des vitesses horizontales u et des pressions p des fluides. Les termes d'interface et les termes sources (en violet) doivent être exprimés en fonction de ces variables.
2. **Analyse des modèles obtenus :** conditions d'existence et d'unicité de solutions, régularité des solutions. Montrer que les solutions des modèles limites sont bien obtenues en prenant la limite d'une suite de solutions des équations de Navier-Stokes compressibles.
3. **Approximation numérique des modèles :** construire des approximations de façon à conserver les propriétés des modèles obtenus (y compris leur comportement asymptotique). Les méthodes numériques utilisées devront être capable d'approximer les termes de relaxation dans les modèles limites, ce qui peut être ardu car ces termes sont fortement non-linéaires.

Modèle microscopique d'écoulement stratifié

On souhaite retrouver (1) pour un écoulement diphasique stratifié par réduction de dimension, c'est-à-dire en intégrant les équations de Navier-Stokes relatives à chaque fluide sur leur hauteur respective.

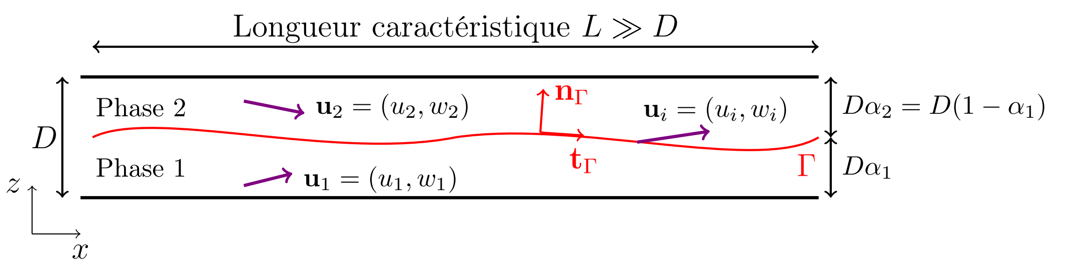

FIGURE 1 – Configuration de l'écoulement. Source : [GS11].

Pour $k = 1,2$ et $t \in \mathbb{R}_+$, on note $\Omega_k(t) = \{(x,z) \mid h_{k-1}(t,x) \leqslant z \leqslant h_k(t,x)\}$ avec $h_0(t,x) = 0$, $h_1(t,x) = \alpha_1(t,x)$ et $h_2(t,x) = D$ les domaines occupés par les fluides au temps t.

Équations et conditions de bord :

- Tenseur des contraintes dans $\Omega_k(t)$:

$$\sigma_k = (-p_k - \mu_k \mathrm{div}(\mathbf{u}_k))\,\mathrm{Id} + \mu_k\left((\nabla\otimes\mathbf{u}_k) + {}^t(\nabla\otimes\mathbf{u}_k)\right). \tag{2}$$

- Équations de Navier-Stokes dans $\Omega_k(t)$:

$$\partial_t\rho_k + \mathrm{div}(\rho_k\mathbf{u}_k) = 0, \tag{3}$$
$$\partial_t(\rho_k\mathbf{u}_k) + \mathrm{div}(\rho_k\mathbf{u}_k\otimes\mathbf{u}_k - \sigma_k) = 0, \tag{4}$$

- Conditions au bord du tuyau :

$$\left\{\begin{array}{l} (\kappa_1u_1 - \mu_1\partial_zu_1)\big|_{z=0} = 0, \\ w_1\big|_{z=0} = 0, \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{l} (\kappa_2u_2 + \mu_2\partial_zu_2)\big|_{z=D} = 0, \\ w_2\big|_{z=D} = 0, \end{array}\right. \tag{5}$$

- Conditions à l'interface :

$$(\sigma_1\mathbf{n}_\Gamma)\big|_{z=D\alpha_1} = (\sigma_2\mathbf{n}_\Gamma)\big|_{z=D\alpha_1}, \tag{6}$$
$$(\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{n}_\Gamma)\big|_{z=D\alpha_1} = (\mathbf{u}_2\cdot\mathbf{n}_\Gamma)\big|_{z=D\alpha_1} = \mathbf{u}_i\cdot\mathbf{n}_\Gamma, \tag{7}$$
$$((\sigma_1\mathbf{n}_\Gamma)\cdot\mathbf{t}_\Gamma - \kappa_i(\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{t}_\Gamma - \mathbf{u}_i\cdot\mathbf{t}_\Gamma))\big|_{z=D\alpha_1} = 0, \tag{8}$$
$$((\sigma_2\mathbf{n}_\Gamma)\cdot\mathbf{t}_\Gamma + \kappa_i(\mathbf{u}_2\cdot\mathbf{t}_\Gamma - \mathbf{u}_i\cdot\mathbf{t}_\Gamma))\big|_{z=D\alpha_1} = 0, \tag{9}$$

- Cinématique de l'interface : traduit le fait qu'une particule située à l'interface à l'origine reste à l'interface au cours du temps.

$$\partial_t\alpha_1 + u_i\partial_x\alpha_1 = \frac{w_i}{D}. \tag{10}$$

Protocole

1. **Hypothèses sur l'écoulement de départ :** $\varepsilon = D/L \ll 1$, $w_k = O(\varepsilon)$ pour $k = 1,2$. L'écoulement est barotrope : $p_k = p_k(\rho_k)$ pour $k = 1,2$. Les coefficients μ, κ et κ_i peuvent dépendre de ε.
2. **Adimensionnement :** introduction de dimensions caractéristiques liées aux différentes grandeurs du problème (e.g. U pour la vitesse u) et rescaling des équations et des conditions de bord grâce à la règle de la chaîne pour obtenir des équations en fonction des grandeurs adimensionnées (e.g. $\tilde{u} = u/U$). En particulier, on rend explicite la dépendance des différents termes en ε.
3. **Analyse asymptotique :** on néglige certains termes qui deviennent très petits quand $\varepsilon \to 0$.
4. **Moyennisation :** intégration des équations asymptotiques sur la hauteur respective des fluides. On obtient un système d'équations sur les grandeurs moyennes, décrivant donc un écoulement diphasique en une dimension.
5. **Fermeture des équations :** l'intégration des équations a fait apparaître des termes de bord, que l'on exprime en fonction des grandeurs moyennes à l'aide des conditions au bord et à l'interface.
6. **Limite** $\varepsilon \to 0$ et identification du modèle 1D obtenu.

Adimensionnement et obtention d'un modèle moyenné

Équations adimensionnées : pour $k = 1,2$,

$$\partial_t\alpha_1 + u_i^\varepsilon\partial_x\alpha_1 = w_i^\varepsilon, \tag{11}$$
$$\partial_t\rho_k^\varepsilon + \partial_x(\rho_k^\varepsilon u_k^\varepsilon) + \partial_z(\rho_k^\varepsilon w_k^\varepsilon) = 0, \tag{12}$$
$$\partial_t(\rho_k^\varepsilon u_k^\varepsilon) + \partial_x(\rho_k^\varepsilon(u_k^\varepsilon)^2 + p_k^\varepsilon) + \partial_z(\rho_k^\varepsilon u_k^\varepsilon w_k^\varepsilon) = \mu_k\partial_{xx}u_k^\varepsilon + \frac{\mu_k}{\varepsilon^2}\partial_{zz}u_k^\varepsilon, \tag{13}$$
$$\partial_zp_k^\varepsilon = \mu_k\partial_{zz}w_k^\varepsilon + O(\varepsilon^2). \tag{14}$$

Équations moyennées : notons, pour $f : \Omega_k \to \mathbb{R}$, $\overline{f} = \frac{1}{\alpha_k} = \int_{h_{k-1}}^{h_k} f(z)\mathrm{d}z$ et $\widehat{f} = \frac{\overline{\rho_kf}}{\overline{\rho_k}}$. Posons $F_k = p_k - \mu_k\partial_xu_k$. On a

$$\partial_t\alpha_1 + u_i^\varepsilon\partial_x\alpha_1 = w_i^\varepsilon, \tag{15}$$
$$\partial_t(\alpha_1\overline{\rho_1^\varepsilon}) + \partial_x(\alpha_1\overline{\rho_1^\varepsilon}\widehat{u_1^\varepsilon}) = 0, \tag{16}$$
$$\partial_t(\alpha_2\overline{\rho_2^\varepsilon}) + \partial_x(\alpha_2\overline{\rho_2^\varepsilon}\widehat{u_2^\varepsilon}) = 0, \tag{17}$$
$$\partial_t(\alpha_1\overline{\rho_1^\varepsilon}\,\widehat{u_1^\varepsilon}) + \partial_x(\alpha_1(\overline{\rho_1^\varepsilon}\widehat{u_1^\varepsilon}^2 + \overline{F_1^\varepsilon})) = -\frac{\kappa_1}{\varepsilon}u_1^\varepsilon(0) + \frac{\mu_1}{\varepsilon^2}\partial_zu_1^\varepsilon(\alpha_1) + F_1^\varepsilon(\alpha_1)\partial_x\alpha_1 + O\left(\frac{\varepsilon^2\kappa^2+\varepsilon^4}{\mu^2}\right), \tag{18}$$
$$\partial_t(\alpha_2\overline{\rho_2^\varepsilon}\widehat{u_2^\varepsilon}) + \partial_x(\alpha_2(\overline{\rho_2^\varepsilon}\widehat{u_2^\varepsilon}^2 + \overline{F_2^\varepsilon})) = -\frac{\kappa_2}{\varepsilon}u_2^\varepsilon(1) - \frac{\mu_2}{\varepsilon^2}\partial_zu_2^\varepsilon(\alpha_1) + F_2^\varepsilon(\alpha_1)\partial_x\alpha_2 + O\left(\frac{\varepsilon^2\kappa^2+\varepsilon^4}{\mu^2}\right). \tag{19}$$

Fermeture des termes de bord :

$$\partial_t\alpha_1 + \frac{(\alpha_2\mu_1)\widehat{u_1^\varepsilon} + (\alpha_1\mu_2)\widehat{u_2^\varepsilon}}{\alpha_1\mu_2+\alpha_2\mu_1}\partial_x\alpha_1 = \frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_2\mu_1+\alpha_1\mu_2}(\overline{F_1^\varepsilon} + 2\mu_1\overline{\partial_xu_1^\varepsilon} - \overline{F_2^\varepsilon} - 2\mu_2\overline{\partial_xu_2^\varepsilon}) + O\left(\frac{\varepsilon\kappa+\varepsilon^2}{\mu} + \frac{\mu}{\kappa_i}\varepsilon\right), \tag{20}$$
$$\partial_t(\alpha_1\overline{\rho_1^\varepsilon}) + \partial_x(\alpha_1\overline{\rho_1^\varepsilon}\widehat{u_1^\varepsilon}) = 0, \tag{21}$$
$$\partial_t(\alpha_2\overline{\rho_2^\varepsilon}) + \partial_x(\alpha_2\overline{\rho_2^\varepsilon}\widehat{u_2^\varepsilon}) = 0, \tag{22}$$
$$\partial_t(\alpha_1\overline{\rho_1^\varepsilon}\widehat{u_1^\varepsilon}) + \partial_x(\alpha_1(\overline{\rho_1^\varepsilon}\widehat{u_1^\varepsilon}^2 + \overline{F_1^\varepsilon})) = -\frac{\kappa_1}{\varepsilon}\widehat{u_1^\varepsilon} - \frac{\kappa_i}{2\varepsilon}(\widehat{u_1^\varepsilon} - \widehat{u_2^\varepsilon}) + F_1^\varepsilon(\alpha_1)\partial_x\alpha_1 + O\left(\mu + \frac{\kappa\kappa_i+\varepsilon\kappa_i}{\mu} + \frac{\varepsilon^2\kappa^2+\varepsilon^4}{\mu^2}\right), \tag{23}$$
$$\partial_t(\alpha_2\overline{\rho_2^\varepsilon}\widehat{u_2^\varepsilon}) + \partial_x(\alpha_2(\overline{\rho_2^\varepsilon}\widehat{u_2^\varepsilon}^2 + \overline{F_2^\varepsilon})) = -\frac{\kappa_2}{\varepsilon}\widehat{u_2^\varepsilon} + \frac{\kappa_i}{2\varepsilon}(\widehat{u_1^\varepsilon} - \widehat{u_2^\varepsilon}) + F_2^\varepsilon(\alpha_1)\partial_x\alpha_2 + O\left(\mu + \frac{\kappa\kappa_i+\varepsilon\kappa_i}{\mu} + \frac{\varepsilon^2\kappa^2+\varepsilon^4}{\mu^2}\right). \tag{24}$$

Modèle moyenné asymptotique

Discussion sur les coefficients μ, κ et κ_i : on souhaite que les termes d'erreur tendent vers 0 quand ε tend vers 0 et que les termes sources de nos équations ne dépendent pas de ε à la limite. Cela nous mène à imposer que

$$\forall k = 1,2, \qquad \mu_k = \underline{\mu_k}\varepsilon^\tau,\ 0 < \tau \leqslant 2, \quad \kappa_k = \underline{\kappa_k}\varepsilon^\xi,\ \xi > 1 \text{ et } \kappa_i = \underline{\kappa_i}\varepsilon.$$

Discussion sur les pressions : une analyse de notre modèle nous donne que $p_1^\varepsilon(\alpha_1) = p_2^\varepsilon(\alpha_1) + O(\mu)$, $\overline{p_1^\varepsilon} = \overline{p_2^\varepsilon} + O(\mu)$ et donc $\overline{F_1^\varepsilon} - \overline{F_2^\varepsilon} = O(\mu)$. On en déduit deux choses :

1. Le terme $\theta_p(\overline{F_1^\varepsilon} - \overline{F_2^\varepsilon})$ est d'ordre 1 dans (20) mais sa limite quand $\varepsilon \to 0$ est indéterminée. On ne peut pas utiliser l'équation d'advection sur α_1 dans notre modèle limite.
2. Comme on a une erreur en $O(\mu)$ dans nos équations de la quantité de mouvement, on ne peut pas distinguer les flux effectifs F_k des pressions p_k. De plus, nos pressions sont indistinguables. On se retrouve avec un modèle à une pression.

Modèle final :

$$\partial_t(\alpha_1\overline{\rho_1}) + \partial_x(\alpha_1\overline{\rho_1}\,\widehat{u_1}) = 0, \tag{25}$$
$$\partial_t(\alpha_2\overline{\rho_2}) + \partial_x(\alpha_2\overline{\rho_2}\,\widehat{u_2}) = 0, \tag{26}$$
$$\partial_t(\alpha_1\overline{\rho_1}\widehat{u_1}) + \partial_x(\alpha_1\overline{\rho_1}\widehat{u_1}^2 + \alpha_1\overline{p_1}) - p_i\partial_x\alpha_1 = -\frac{\kappa_i}{2}(\widehat{u_1} - \widehat{u_2}), \tag{27}$$
$$\partial_t(\alpha_2\overline{\rho_2}\widehat{u_2}) + \partial_x(\alpha_2\overline{\rho_2}\widehat{u_2}^2 + \alpha_2\overline{p_2}) - p_i\partial_x\alpha_2 = \frac{\kappa_i}{2}(\widehat{u_1} - \widehat{u_2}), \tag{28}$$
$$\alpha_1 + \alpha_2 = 1, \tag{29}$$
$$\overline{p_1} = p_1(\overline{\rho_1}), \tag{30}$$
$$\overline{p_2} = p_2(\overline{\rho_2}), \tag{31}$$
$$p_1(\overline{\rho_1}) = p_2(\overline{\rho_2}) = p_i. \tag{32}$$

Commentaires sur le modèle (25)-(32) **:**

- Ce modèle est la version isentropique du modèle diphasique standard proposé dans [DP99] et [IH11], dit à deux vitesses et une pression.
- Il est non-hyperbolique, mais on peut le stabiliser à l'aide de termes supplémentaires [BDGG10]. Le modèle (1) considère quant à lui deux pressions distinctes avec une équation de transport sur α_1, et est (non-strictement) hyperbolique.

Pistes de poursuite :

- Étude des conditions minimales de régularité nécessaires pour effectuer nos calculs de dérivation du modèle.
- Passage à la limite $\underline{\kappa_i} \to +\infty$ pour obtenir un modèle à une pression et une vitesse qui est strictement hyperbolique.

Bibliographie

[BBL22] Didier Bresch, Cosmin Burtea, and Frédéric Lagoutière. Mathematical justification of a compressible bifluid system with different pressure laws: a continuous approach. *Applicable Analysis*, 101(12), 2022.

[BDGG10] D. Bresch, B. Desjardins, J. M. Ghidaglia, and E. Grenier. Global Weak Solutions to a Generic Two-Fluid Model. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 196(2), 2010.

[BN86] M.R. Baer and J.W. Nunziato. A Two-Phase Mixture Theory for the Deflagration-to-Detonation Transition (DDT) in Reactive Granular Materials. *International Journal of Multiphase Flow*, 12(6), 1986.

[DP99] D.A. Drew and S.L. Passman. *Theory of Multicomponent Fluids*. Springer, New York, 1999.

[GP01] J.-F. Gerbeau and B. Perthame. Derivation of Viscous Saint-Venant System for Laminar Shallow Water; Numerical Validation. *Discrete & Continuous Dynamical Systems - B*, 1(1), 2001.

[GS11] E. Godlewski and N. Seguin. Modèles hyperboliques d'écoulements complexes dans le domaine de l'énergie, 2011.

[IH11] M. Ishii and T. Hibiki. *Thermo-Fluid Dynamics of Two-Phase Flow*. Springer, New York, 2nd ed edition, 2011.

[SW84] H.B. Stewart and B. Wendroff. Two-phase flow: Models and methods. *Journal of Computational Physics*, 56(3), 1984.